សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

# លំហាត់ជ្រើសរើសនិងដំណោះស្រាយ

# គណិតវិទ្យា

## ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍បរទេស

ប្រជុំរូបមន្តនិងគន្លឹះដោះស្រាយពិសេសៗ

១៦៨ លំហាត់មានដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ

អ្នករៀបរៀង លឹម ផល្គុន

2020

www.mathtoday2020@gmail.com

គណិតវិទ្យា ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍បរទេស

# ជំពូកទី០១

# សង្ខេបមេរៀននិងរូបមន្ត

# មេរៀនសង្ខេបនិងរូបមន្តសំខាន់ៗ

## មេរៀនទី០១. ស្វ៊ីត

១.ស្វ៊ីតចំនួនពិត

$a)$ និយមន័យ

$*$ ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខកំណត់ពីសំណុំ $\mathbb{N}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

$*$ គេប្រើអក្សរ $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ សម្រាប់តាងឲ្យតួនៃស្វ៊ីតដែល $u_1$ ជាតួ ទីមួយ $u_2$ ជាតួទីពីរ $u_3$ ជាតួទីបី ....,$u_n$ ជាតួទី $n$ ហើយគេតាងស្វ៊ីតនោះដោយនិម្មិតសញ្ញា $(u_n)$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ហើយ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ....., n, ....\}$ ។

$*$ ក្នុងករណីដែលគេឲ្យចំនួនគត់ $n = 0, 1, 2, 3, ....$ នោះស្វ៊ីត $(u_n)$ ផ្ដើមពីតួ $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ..$ ។

$b)$ តួទូទៅ ឬ តួទី $n$

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(a_n)$ មានតួ $f(1), f(2), f(3), ....$ ។ តួទី $n$ នៃស្វ៊ីតនេះគឺ $a_n = f(n)$ ។

$c)$ អថេរភាពនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត(ស្វ៊ីតកើន និង ស្វ៊ីតចុះ)

$*$ ស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតកើនលុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ ។

$*$ ស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតចុះលុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ ។

$d)$ ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនលុះត្រាតែ $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច ឬ $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

បានន័យថា $a_1 < a_2 < a_3 < ..... < a_n < a_{n+1} < ....$

ឬ $a_1 > a_2 > a_3 > ..... > a_n > a_{n+1} > .....$ ។

$e)$ ស្វ៊ីតទាល់

$*$ ស្វ៊ីតទាល់លើ

ស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើលុះត្រាតែមានចំនួនពិត $M$ មួយដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \le M$ ។ ចំនួន $M$ ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត $(a_n)$ ។

$*$ ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមលុះត្រាតែមានចំនួនពិត $m$ មួយដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \ge m$ ។ ចំនួន $m$ ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)$ ។

$*$ ស្វ៊ីតទាល់

ស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតទាល់លុះត្រាតែមានចំនួនពិត $m$ និង $M$ ដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m \le a_n \le M$ ។

ចំនួន $m$ ហៅថាគោលក្រោម និង $M$ ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត $(a_n)$ បានន័យថា $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង ។

២.ស្វ៊ីតនព្វន្ត

$a)$ និយមន័យ ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ $d$ មួយហៅថាផលសងរួម ។ ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $(a_n)$ ដែលតាងដោយ $d$ កំណត់ដោយ $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = .... = a_n - a_{n-1}$ ។

$b)$ តួទី $n$ នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ឧបមាថា $a_1, a_2, a_3, a_4, ....., a_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d$ ។

តាមនិយមន័យគេបាន $a_1 = a_1$

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$------------$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ដូចនេះបើ $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ $a_1$ និងផលសងរួម $d$ នោះតួទី $n$ នៃស្វ៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ។

$c)$ ផលបូកតួចុងស្មើនិងផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

តាមរូបមន្តតួទី $n$ នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $a_n = a_1 + (n-1)d$

គេបាន $a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + (n-1)d$$

---------------------------------

ដូចនេះ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = .... = a_k + a_{n-k+1}$ ។

$d)$ ផលបូក $n$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ឧបមាថា $a_1, a_2, a_3, ....., a_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ។ គេតាង $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + .... + a_n$ ជាផលបូក $n$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតគេអាចសរសេរ $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ..... + a_1$

គេបាន $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + .... + (a_n + a_1)$

ដោយប្រើលក្ខណៈ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = .... = a_k + a_{n-k+1}$

គេបាន $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + .... + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ។

## ៣.ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$a)$ និយមន័យ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ $q$ មួយដែល $q \neq 0$ ។

ចំនួនថេរ $q$ ហៅថាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីត ឬ រេសុងនៃស្វ៊ីត ។ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(a_n)$ ដែលតាងដោយ $q$ កំណត់ដោយ $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = .... = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ ។

$b)$ តួទី $n$ នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឧបមាថា $a_1, a_2, a_3, a_4, ....., a_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q$ ។

តាមនិយមន័យគេបាន $a_1 = a_1$

$$a_2 = a_1 \times q$$

$$a_3 = a_2 \times q = a_1 \times q^2$$

$$a_4 = a_3 \times q = a_1 \times q^3$$

-------------

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

បើ $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ $a_1$ និងផលធៀបរួម $q$ នោះតួទី $n$ នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ ។

$c)$ **ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង**

តាមរូបមន្តតួទី $n$ នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $a_n = a_1 \times q^{n-1}$

គេបាន $a_1 \times a_n = a_1 \times a_1.q^{n-1} = a_1^2 \times q^{n-1}$

$a_2 \times a_{n-1} = a_1.q \times a_1.q^{n-2} = a_1^2 \times q^{n-1}$

$a_3 \times a_{n-2} = a_1.q^2 \times a_1.q^{n-3} = a_1^2 \times q^{n-1}$

-----------------------------

ដូចនេះ៖ $a_1 \times a_n = a_2 \times a_{n-1} = a_3 \times a_{n-2} = .... = a_k \times a_{n-k+1}$ ។

$d)$ **ផលបូក $n$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ**

ឧបមាថា $a_1, a_2, a_3, ....., a_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។

គេតាង $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + .... + a_n$ (1) ជាផលបូក $n$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីត។

គេបាន $q.S_n = a_1 q + a_2 q + q_3 q + .... + a_n q$

ឬ $q S_n = a_2 + a_3 + a_4 + .... + a_n + q a_n$ (2)

ដក $(1)$ និង $(2)$ គេបាន $(1-q)S_n = a_1 - q a_n = a_1 - a_1 \times q^n = a_1(1-q^n)$

ដូចនេះ៖ $S_n = a_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ ដែល $q \neq 1$ ។

$e)$ **ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ**

ឧបមាថា $a_1, a_2, a_3, ....., a_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។ គេតាង $S_n$ ជាផលបូក $n$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ ហើយយក $q$ ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីត ដែល $q \neq 1$ ។

គេបាន $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 \times \frac{1-q^2}{1-q}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \times \frac{1-q^3}{1-q}$$

------------------

$$S_n = a_1 + a_2 + .... + a_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - a_1 . \frac{q^n}{1-q}$$

-----------------------------

បើ $|q| < 1$ នោះតម្លៃ $q^n \to 0$ កាលណា $n \to \infty$

ដូចនេះផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(a_n)$ ដែលមានផលធៀបរួម $q$ ,$(\ |q|<1)$ និងមានតួដំបូង $a_1$ កំណត់ដោយ $S_\infty=\dfrac{a_1}{1-q}$ ។

## ៤.លីមីតនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត

**និយមន័យៈ**

$*$គេថា $u_n$ ខិតជិត $+\infty$ កាលណា $n$ ខិតជិត $+\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $A$ ធំប៉ុនណាក៏ដោយក៏គេអាចរកចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p$ មួយដែល $u_n>A$ ចំពោះ$n>p$ ។ គេសរសេរ ៖ $\forall A\in\mathbb{R}\ ,\exists p\in\mathbb{N}\ /\ \forall n>p:u_n>A$ ។

$*$គេថា $u_n$ ខិតជិត $-\infty$ កាលណា $n$ ខិតជិត $+\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $A$ ធំប៉ុនណាក៏ដោយក៏គេអាចរកចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p$ មួយដែល $u_n<A$ ចំពោះ$n>p$ ។ គេសរសេរ ៖ $\forall A\in\mathbb{R}\ ,\exists p\in\mathbb{N}\ /\ \forall n>p:u_n<A$ ។

$*$គេថា $u_n$ ខិតជិតចំនួនពិត $\ell$ កាលណា $n$ ខិតជិត $+\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\varepsilon>0$ ណាក៏ដោយគេអាចរកចំនួនគត់ធម្មជាតិ$p$ មួយដែលចំពោះ$n>p\ |u_n-\ell|<\varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\forall\varepsilon>0,\exists p\in\mathbb{N}\ /\ \forall n>p:|u_n-\ell|<\varepsilon$ ។

## ៥.ស្វ៊ីតរួមនិងស្វ៊ីតរីក

$*$ សន្មតថា $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ គឺជាស្វ៊ីតមួយ ។ យើងនិយាយថា $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$ បើគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $N>0$ ដែល $n>N$ នាំឲ្យ $|a_n-L|<\varepsilon$ ។

$*$ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$ នោះយើងនិយាយថាស្វ៊ីត$(a_n)$ ជាស្វ៊ីតរួម( Converges ) ខិតទៅរកចំនួនពិត$L$ ។

$*$ បើ$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$ ឬ$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$នោះគេថា$(a_n)$ជាស្វ៊ីតរីក( Diverges )។

## ៦.លក្ខណ:និងទ្រឹស្តីបទ

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)$

$b)\ \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)$

$c)\ \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)-\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)$

$d)\ \lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)\ \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)$

$e)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)}\quad,\quad\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)\neq0$

## ៧.ស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច

គេឲ្យ $z_n = a_n + ib_n$ ដែល $(a_n)\&(b_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរនោះគេបាន៖

$$\lim_{n\to+\infty}(z_n) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = \ell_1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n) = \ell_2 \end{cases}$$ ដែល $L = \ell_1 + i\ell_2$ ។

## ៨.និយមន័យ

ស្វ៊ីតទាល់លើ ( Upper-bounded sequence )

A sequence $(a_n)$ is called an upper-bounded sequence if there exists a finite number $U$ such that $a_n \le U$ for each natural number n.

ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម (lower-bounded sequence)

A sequence $(a_n)$ is called a lower-bounded sequence if there exists a finite number $L$ such that $a_n \ge L$ for each natural number n.

## ៩.ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន (Monotone Sequences)

និយមន័យ(ម៉ូណូតូនកើន)

A sequence $(a_n)$ is called monotone increasing sequence, if $a_{n+1} \ge a_n$ for each natural number n.

និយមន័យ(ម៉ូណូតូនចុះ)

A sequence $(a_n)$ is called a monotone decreasing sequence, if $a_{n+1} \le a_n$ for each natural number n.

## ១០.ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីលើលីមីត(Cauchy's theorems on limits)

$*$ Cauchy's first theorem on limits

If a sequence $(a_n)$ converges to $\ell$ , then the sequence

$b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$ also converges to $\ell$ .

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty}(b_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n}{n}\right)$$

$*$ Cauchy's second theorem on limits

Let $(a_n)$ be a sequences of strictly positive numbers.

If $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ell$ then $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\ell$ .

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ell}$$

១១.ទ្រឹស្តីបទ

* Let $(a_n)$ be a sequence of strictly positive numbers.

If $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\ell$ then $\lim_{n\to+\infty}(a_1a_2a_3....a_n)^{\frac{1}{n}}=\ell$ .

* Let $(a_n)$ and $(b_n)$ be sequences of positive real numbers and suppose that for some $\ell\in\mathbb{R}$ , $\ell>0$, we have $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\ell$ .

Then $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=+\infty$ if and only if $\lim_{n\to+\infty}(b_n)=+\infty$ .

* Suppose that $(a_n),(b_n)$ and $(c_n)$ are three sequences such that

$\begin{cases}\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow a_n<c_n<b_n\\ \lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(b_n)=\ell\end{cases}$ then $(c_n)$ also converges to $\ell$ .

* Let $(a_n)$ and $(b_n)$ be two sequences.

If $\begin{cases}\exists N\in\mathbb{N}:(n>N\Rightarrow a_n<b_n)\\ \lim_{n\to+\infty}(a_n)=+\infty\end{cases}$ then $\lim_{n\to+\infty}(b_n)=+\infty$ .

**១២. Stolz-Cesaro Lemma $\frac{\infty}{\infty}$ and $\frac{0}{0}$**

Let $(a_n)$ and $(b_n)$ be two sequences of real numbers such that $(b_n)$ is increasing and $\lim_{n\to+\infty}(b_n)=+\infty$ and $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right)=\ell\in\mathbb{R}$

then $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\ell$ .

* Stolz-Cesaro Lemma $\frac{\infty}{\infty}$

គេឲ្យ $(a_n)\&(b_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរដោយដឹងថា ៖

$(i):(b_n)$ ជាស្វ៊ីតកើននិង $\lim_{n\to+\infty}(b_n)=+\infty$ និង $(ii):\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right)=\ell\in\mathbb{R}$

នោះគេបាន $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ មានលីមីតនិងស្មើ $\ell$ ។

$*$ Stolz-Cesaro Lemma $\frac{0}{0}$

គេឲ្យ $(a_n)\&(b_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរដោយដឹងថា ៖

$(i)$: $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(b_n)=0$

$(ii)$: $(b_n)$ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច

$(iii)$: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right)=\ell\in\mathbb{R}$

នោះគេបាន $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ មានលីមីតនិងស្មើ $\ell$ ។

**មេរៀនទី០២. ចំនួនកុំផ្លិច**

## ១.ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

**១.១.និយមន័យ**(Definition of complex Numbers)

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតគឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែលក្រោយពីបង្រួមរួចមានទម្រង់ទូទៅ

$z=a+i.b$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ និង $i=\sqrt{-1}$ ឬ $i^2=-1$ ( ឯកតានិម្មិត )

$a$ ហៅថាផ្នែកពិតដែលគេអាចតាងដោយ $\mathrm{Re}(z)=a$ និង $b$ ហៅថាផ្នែកនិម្មិត ដែលគេអាចតាងដោយ $\mathrm{Im}(z)=b$ ។

**១.២.ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា**(Equality of two complex numbers)

$A+i.B=a+i.b\Leftrightarrow\begin{cases}A=a\\B=b\end{cases}$ ដែល $a,b,A,B\in\mathbb{R}$ ។

**១.៣.ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់**(Complex conjugate)

បើ $z=a+i.b$ នោះ $\bar{z}=a-i.b$ ហៅថាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

**១.៤.ប្រមាណវិធីលើកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត**(Basic operations)

ក. វិធីបូក ( Addition of complex numbers )

$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$ ដែល $a,b,c,d$ ជាចំនួនពិត។

ខ. វិធីដក ( Subtraction of complex numbers )

$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$ ដែល $a,b,c,d$ ជាចំនួនពិត។

គ. វិធីគុណ ( Multiply complex numbers )

$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$ ដែល $a,b,c,d$ ជាចំនួនពិត។

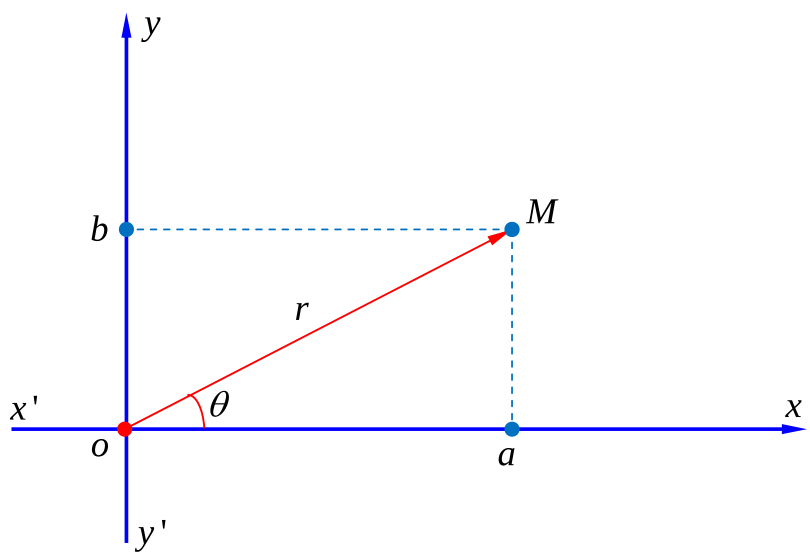
ឃ.វិធីចែក ( Divide of two complex numbers )

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

ដែល $a,b,c,d$ ជាចំនួនពិតនិង $c\neq 0,d\neq 0$ ។

## ២.ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

### ២.១.ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់ (Modulus and argument of a complex number)




ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ; $a,b\in\mathbb{R}$ ។ យក $M(a,b)$ ជារូបភាព

នៃ $z$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(xoy)$ ។ តាង $r=OM$ និង $\theta$ ជាមុំផ្គុំដោយ $\overrightarrow{OM}$ និង $(ox)$ ។

$r=|z|=OM=\sqrt{a^2+b^2}$ ហៅថាម៉ូឌុលនិង $\theta=\arg(z)$ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ

ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ដែល $\cos\theta=\frac{a}{r}$ និង $\sin\theta=\frac{b}{r}$ ។

២.២.ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រឬទម្រង់ប៉ូលែនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយៈ

(Polar Form of a Complex Number)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + ib = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$ ដោយ $\cos\theta = \frac{a}{r}$ និង $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ដែល $r > 0$ និង $\theta \in \mathbb{R}$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

២.៣.ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមាន $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ និង $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

✍ វិធីគុណ (Multiplying Complex Numbers in Polar Form)

$$z \times w = r.\rho[\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)]$$

✍ វិធីចែក(Division) $\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}[\cos(\theta - \varphi) + i\sin(\theta - \varphi)]$

២.៤.ទ្រឹស្តីបទដឺម័រ (De Moivre's theorem)

គ្រប់ចំនួនពិត $\varphi$ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ $n$ គេបាន ៖

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i.\sin(n\varphi)$

២.៥.ស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច(Powers of complex number )

គ្រប់ចំនួនពិត $\varphi$ និង $r > 0$ និង ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ $n$ គេបាន ៖

$\left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left[\cos(n\varphi) + i.\sin(n\varphi)\right]$ ។

២.៦.ឫសនៃចំនួនកុំផ្លិច (Complex roots)

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ដែល $r > 0$ , $\theta \in \mathbb{R}$

ឫសទី $n$ នៃ $z$ កំណត់ដោយ $w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

ដែល $k = 0,1,2,...,(n-1)$ ។

## មេរៀនទី០៣. ទ្រឹស្តីបទវិសមភាពសំខាន់ៗ

១-វិសមភាព Schur :

គេយក $x, y$ និង $z$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $r > 0$ គេបាន $\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z) \geq 0$ ។

២-វិសមភាព Cauchy-Schwarz:

គេឲ្យ $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គេបាន $(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$

៣-វិសមភាព AM-GM:

គេឲ្យ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ជា $n$ ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

គេបាន $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$ ។

៤-វិសមភាព Holder :

គេឲ្យ $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ សន្មតថា $p > 1$ និង $q > 1$

ដែល $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ នោះគេបាន $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$ ។

៥-វិសមភាព Bernoulli :

ចំពោះគ្រប់ $r > 0$ និង $x \geq -1$ គេបាន $(1+x)^r \geq 1 + rx$ ។

៦-វិសមភាព Chebyshev:

គេឲ្យចំនួនពិត $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ និង $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$ ។

គេបាន $\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$

៧-វិសមភាព Minkowski:

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ និង $p > 1$ ។

គេបាន $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ។

# មេរៀនទី០៤.អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

*A*) ទំនាក់ទំនងគ្រឹះ

ក. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ខ. $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ គ. $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ឃ. $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ង. $1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ ច. $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

*B*) រូបមន្តបំលែងមុំផ្ទុំ

ក.មុំផ្ទុយគ្នា $\theta$ និង $-\theta$ $\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\\ \cot(-\theta)=-\cot\theta\end{cases}$

ខ.មុំបំពេញគ្នា $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ និង $\theta$ $\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta\\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta\\ \tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta\\ \cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta\end{cases}$

គ.មុំបន្ថែមគ្នា $\pi-\theta$ និង $\theta$ $\begin{cases}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\\ \cot(\pi-\theta)=-\cot\theta\end{cases}$

ឃ.មុំមានផលសងស្មើនឹង $\pi$ $\begin{cases}\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi+\theta)=\tan\theta\\ \cot(\pi+\theta)=\cot\theta\end{cases}$

ង.មុំមានផលសងស្មើនឹង $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta \\ \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta \end{cases}$$

$C$) រូបមន្តផលបូកនិងផលដករវាងមុំពីរ

ក. $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

ខ. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

គ. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

ឃ. $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

ង. $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$

$D$) រូបមន្តមុំឌុប

ក. $\sin 2a=\sin a\cos a$

ខ. $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

គ. $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$E$) រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

ក. $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

ខ. $\sin b\cos a=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

គ. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

ឃ. $\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$

$F$) រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

ក. $\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

ខ. $\sin p-\sin q=2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

គ. $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

ឃ. $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$

ង. $\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

ច. $\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

ឆ. $\cot p+\cot q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$

ជ. $\cot p-\cot q=-\frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$

$G$) កន្សោម $\sin 3a$ , $\cos 3a$ និង $\tan 3a$

ក. $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

ខ. $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

គ. $\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

$H$) អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $\theta+2k\pi$ និង $\theta$

ក. $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$

ខ. $\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

គ. $\tan(\theta+2k\pi)=\tan\theta$

ឃ. $\cot(\theta+2k\pi)=\cot\theta$ (ដែល $k$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ )។

$I$) កន្សោម $\cos x$ , $\sin x$ និង $\tan x$ ជាអនុគមន៍នៃ $t=\tan\frac{x}{2}$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ , $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ , $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ ។

$J$) សមីការត្រីកោណមាត្រ ៖

ក. $\sin x=\sin\theta$ សមមូល $\left[\begin{array}{l} x=\theta+2k\pi \\ x=\pi-\theta+2k\pi \end{array}\right.$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។

ខ. $\cos x=\cos\theta$ សមមូល $\left[\begin{array}{l} x=\theta+2k\pi \\ x=-\theta+2k\pi \end{array}\right.$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។

គ. $\tan x=\tan\theta$ សមមូល $x=\theta+k\pi$

## មេរៀនទី០៥.អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

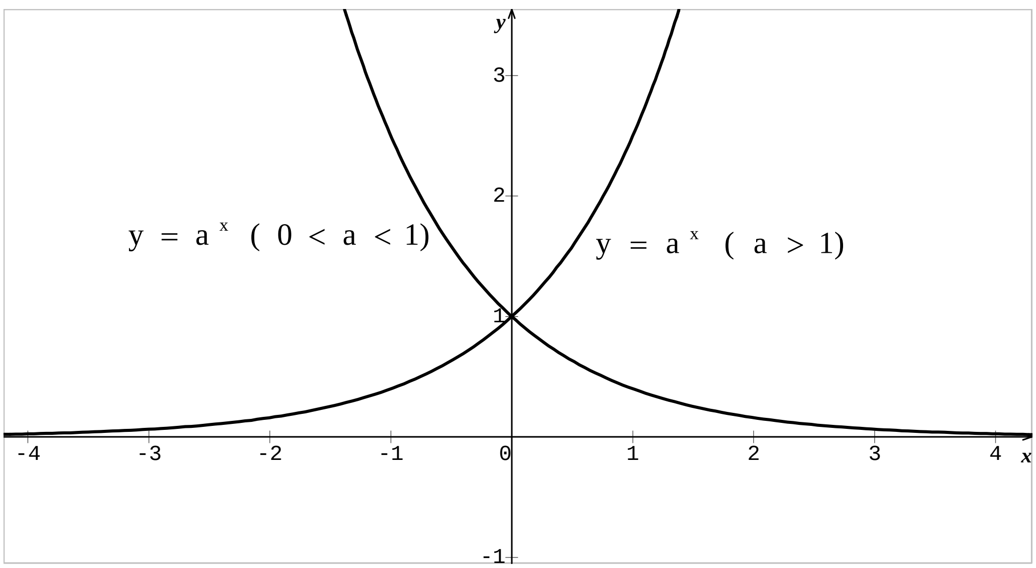
### ១-និយមន័យ

អនុគមន៍ $f$ កំណត់ពីសំណុំ $\mathbb{R}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}_+^*$ ដែលកំណត់ដោយ $y = f(x) = a^x$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ ហៅថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។ $a$ ហៅថាគោល និង $x$ ហៅថាអថេរសេរី ។

### ២-លក្ខណះ

ក )បើ $a > 1$ នោះ $y = a^x$ ជាអនុគមន៍កើន គឺគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2$ ដែល $x_1 < x_2$ នាំឲ្យ $a^{x_1} < a^{x_2}$ ។

ខ )បើ $0 < a < 1$ នោះ $y = a^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ គឺគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2$ ដែល $x_1 < x_2$ នាំឲ្យ $a^{x_1} > a^{x_2}$ ។




### ៣-សមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក )បើ $a > 0, a \neq 1$ នោះ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

ខ )ជាទូទៅ ៖

$$\left[A(x)\right]^{f(x)} = \left[A(x)\right]^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ \left[A(x)-1\right]\left[f(x)-g(x)\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} A(x) = 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

៤-វិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក )បើ $a>1$ នោះ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

ខ )បើ $0<a<1$ នោះ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

គ )ជាទូទៅ ៖

$$\left[A(x)\right]^{f(x)} > \left[A(x)\right]^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x)>1 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<A(x)<1 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

៥-វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការទម្រង់ $A.a^{2x} + B.a^{x} + C = 0$

ដែល $a>1$ , $a\neq 1$ ,$A,B,C \in \mathbb{R}$ ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវតាង $t = a^{x}$ , $t>0$

សមីការដែលឲ្យក្លាយជាសមីការដឺក្រេទីពីរ $Ax^2 + Bx + C = 0$

៦-វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការទម្រង់ $A.a^{u(x)} + B.b^{u(x)} = C$

ដែល $a,b>0, a\neq 1, b\neq 1$ , $a\times b = 1$ , $A,B,C\in\mathbb{R}$ ។

ដោយ $a\times b=1$ នោះ $b=\dfrac{1}{a}$ ហើយសមីការអាចសរសេរ

$A.a^{u(x)} + B.\dfrac{1}{a^{u(x)}} = C$ សមមូល $A.a^{2u(x)} - C.a^{u(x)} + B = 0$

តាង $t = a^{u(x)}$ , $t>0$ សមីការក្លាយទៅជាសមីការដឺក្រេទីពីរ $At^2 - C.t + B = 0$ ។

៧-វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការទម្រង់

$a^{u(x)+v(x)} - (\beta a^{u(x)} + \alpha a^{v(x)}) + \alpha\beta = 0$ ដែល $a>0, a\neq 1$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវបម្លែងសមីការដូចខាងក្រោម ៖

$$a^{u(x)+v(x)} - \beta a^{u(x)} - \alpha a^{v(x)} + \alpha\beta = 0$$

$$a^{v(x)}\left[a^{u(x)} - \alpha\right] - \beta\left[a^{u(x)} - \alpha\right] = 0$$

$$\left[a^{u(x)} - \alpha\right]\left[a^{v(x)} - \beta\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^{u(x)} = \alpha \\ a^{v(x)} = \beta \end{array}\right.$$

# មេរៀនទី០៦.អនុគមន៍លោការីត

## ១-និយមន័យ

យើងដឹងថាអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*+$ កំណត់ដោយ

$$x\to y=f(x)=a^x\ \ (\ a>0,a\neq 1)$$

ហៅថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។

តម្លៃមួយនៃ $x$ វាផ្តល់តម្លៃត្រូវគ្នា $y=a^x$ តែមួយគត់និងច្រាសមកវិញ ។ ហេតុនេះអនុគមន៍ $y=a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាសមួយដែលកំណត់ដោយ $f^{-1}:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$

$$y\to x=f^{-1}(y)=\log_a y$$

គេបាន $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)\Leftrightarrow x=\log_a y=\log_a a^x\ \ (y>0)$ ។

អនុគមន៍ $f$ កំណត់ពីសំណុំចំនួនពិតវិជ្ជមានទៅសំណុំចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ ៖

$$f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$$
$$x\to\ \ y=f(x)=\log_a x\quad (a>0\ ,\ a\neq 1)$$

ហៅថាអនុគមន៍លោការីតគោល $a$ នៃ $x$ ។

## ២-ដែនកំណត់ និង ក្រាប

❖ អនុគមន៍ $y=\log_a x\ \ (\ a>0\ ,\ a\neq 1)$ អាចកំណត់បានគ្រប់ $x>0$ ។

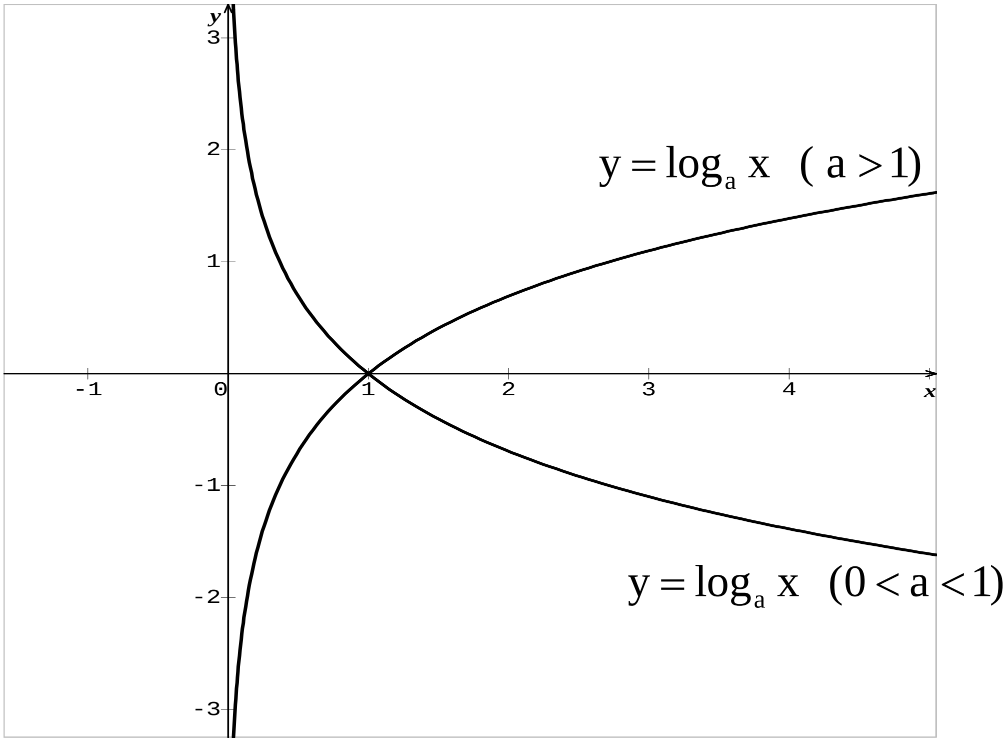
ដូចនេះដែនកំណត់របស់អនុគមន៍គឺ $D=\mathbb{R}_+^*$ ។

❖ បើ $a>1$ នោះ $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $D=\mathbb{R}_+^*$

ហើយបើ $x_1,x_2\in D$ នោះ $x_1<x_2\Rightarrow\log_a x_1<\log_a x_2$ ។

❖ បើ $0<a<1$ នោះ $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $D=\mathbb{R}_+^*$

ហើយបើ $x_1,x_2\in D$ នោះ $x_1<x_2\Rightarrow\log_a x_1>\log_a x_2$ ។




### ៣-លក្ខណៈគ្រឹះ

ក) $\log_a 1 = 0 \quad ; \quad \log_a a = 1 \quad ; \quad \log_a a^\alpha = \alpha$

ខ) $a^{\log_a b} = b$

គ) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad , \quad \forall x > 0 \, , \, y > 0$

ឃ) $\log_a \left( \dfrac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad , \forall x > 0 \, , \, y > 0$

ង) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad , \forall x > 0 \, , \, \alpha \in \Re$

ច) $\log_a \left( \dfrac{1}{x} \right) = -\log_a x \quad , \forall x > 0$

### ៤-រូបមន្តប្តូរគោល

$\log_a x = \log_a b . \log_b x$ ឬ $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

ដែល $a > 0 \, , b > 0 \, , \, x > 0 \, , \, a \neq 1 \, , \, b \neq 1$ ។

❖ សម្គាល់ ៖

ក) $\log_a b . \log_b a = \log_a a = 1$ ឬ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

ខ ) $\log_{a^\alpha} a = \dfrac{1}{\log_a a^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ $,\forall \alpha \neq 0$

គ ) $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha}\log_a b$ ។

## ៥-សមីការលោការីត

ក ) $\log_a f(x) = k \Leftrightarrow f(x) = a^k \quad ( \ a > 0 \ , a \neq 1 \ )$

ខ ) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

គ ) $\log_{A(x)} f(x) = \log_{A(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \ , \ A(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

## ៦-វិសមីការលោការីត

ក )បើ $a > 1$ នោះ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

ខ )បើ $0 < a < 1$ នោះ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

គ )ជាទូទៅ ៖

$$\log_{A(x)} f(x) > \log_{A(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} A(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < A(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

## ៧-លោការីតទសភាគ និង លោការីតនេពែ

❖ បើ $a = 10$ នោះ $y = \log_a x = \log_{10} x$ ហៅថាលោការីតទសភាគឬលោការីតគោល10 ។ គេកំណត់តាងលោការីតទសភាគដោយ $\log x$ ឬ $\lg x$ ដែល $\log x = \lg x = \log_{10} x$ ។

❖ បើ $a = e = 2.718281828459045...$ នោះ $y = \log_a x = \log_e x$ ហៅថាលោការីតធម្មជាតិ ឬ លោការីតនេពែរដែលតាងដោយ $\ln x$. ឬ $Logx$ ដែល $\ln x = Logx = \log_e x$ ។

❖ ទំនាក់ទំនងរវាងលោការីតទសភាគ និង លោការីតនេពែរតាមរូបមន្តប្តូរគោល៖

$\log_a x = \log_a b . \log_b x$

ដោយយក $a=10$ ,$b=e$ នោះ $\log_{10}x=\log_{10}e.\log_e x$ ឬ $\lg x = M.\ln x$
ដែល $M=\log_{10}e=0.43429$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃលោការីតទសភាគ ។

## មេរៀនទី០៧.ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗក្នុងពហុធា

### ១.និយមន័យ

អនុគមន៍មួយដែលមានទម្រង់ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$
ហៅថាពហុធាដឺក្រេទី $n$ នៃមួយអថេរ $x$ ។
ដែលចំនួន $a_0,a_1,a_2,....,a_n$ ជាមេគុណនៃពហុធានិង $a_n\neq 0$ ។ $a_k$ ជាមេគុណមុខតួ $x^k$
នៃពហុធា ( $0\le k\le n$ ) ។

### ២.ពហុធាពីរស្មើគ្នា

**និយមន័យ** ៖ ពហុធាពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែលេខមេគុណត្រូវគ្នាស្មើគ្នា ។
ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$
និង $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+....+b_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ និង $b_n\neq 0$ ។
គេបាន $P(x)=Q(x)\Leftrightarrow a_k=b_k$ ដែល $k=0,1,2,....,n$ ។

### ៣.វិធីបូក និង វិធីដកពហុធា

គេមានពហុធា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_kx^k+...+a_nx^n$
$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+....+b_kx^k+...+b_mx^m$
គេបាន $P(x)+Q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_k+b_k)x^k+....$
និង $P(x)-Q(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+...+(a_k-b_k)x^k+....$ ។

### ៤.វិធីគុណនៃពហុធា

គេមានពហុធា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_kx^k+...+a_nx^n$
$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+....+b_kx^k+...+b_mx^m$ ។
គេបាន $P(x).Q(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+....+a_nb_mx^{m+n}$ ។

៥.អាល់កូរីតវិធីចែក

ឧបមាថាគេមានពហុធាពីរ $A(x)$ និង $B(x)$ ដែល $B(x)\neq 0$ ។

វិធីចែករវាងពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$ គឺរកគូពហុធា $Q(x)$ និង $R(x)$ តែមួយគត់ដែល ៖

$A(x)=B(x).Q(x)+R(x)$ និង $\deg(R)<\deg(B)$ ។ ពហុធា $Q(x)$ ហៅថាផលចែក និង $R(x)$ ហៅថាសំណល់ ។

តាង $\deg(A)$ និង $\deg(B)$ ជាដឺក្រេនៃពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$ រៀងគ្នា ។

-បើ $\deg(A)<\deg(B)$ នោះ $Q(x)=0$ និង $R(x)=B(x)$ ។

-បើ $R(x)\equiv 0$ នោះ $A(x)=B(x)Q(x)$ ក្នុងករណីនេះគេថា $B(x)$ ជាកត្តានៃ $B(x)$ ឬ $A(x)$ ជាពហុគុណនៃ $B(x)$ ឬ $B(x)$ ចែកដាច់ $A(x)$ គេកំណត់សរសេរ $B(x)\,|\,A(x)$ ។

៦.ទ្រឹស្តីបទសំណល់ (Remainder Theorem)

សំណល់នៃវិធីចែកនៃគ្រប់ពហុធា $P(x)$ នឹង $x-\alpha$ គឺ $P(\alpha)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ តាមអាល់កូរីតនៃវិធីចែកយើងបាន $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$

យក $x=\alpha$ គេបាន $P(\alpha)=0\times Q(a)+r=r$ នោះ $r=P(\alpha)$ ។

៧.ទ្រឹស្តីបទ BEZOUT

ពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងទ្វេធា $x-\alpha$ លុះត្រាតែ $P(\alpha)=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ មានពហុធា $Q(x)$ និងចំនួនថេរ $r$ ដែល $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$ ฯ

បើ $x=\alpha$ នោះ $P(\alpha)=r$ ។ ដោយ $(x-a)\,|\,P(x)$ នោះ $r=0$ ។ ហេតុនេះ $P(\alpha)=0$ ។

៨.ទ្រឹស្តីបទ

បើហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)$ នោះគ្រប់ឫសនៃ $Q(x)$ ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

៩.ទ្រឹស្តីបទ

បើពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធាពីរ $R(x)$ និង $Q(x)$ ដែល $R(x)$ និង $Q(x)$ ជាពហុធាបឋមរវាងគ្នានោះ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $P(x).Q(x)$ ។

១០.ទ្រឹស្តីបទ បើ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាពហុធាពីរមានដឺក្រេតូចជាងឬស្មើ $n$ ហើយ ដោយដឹងថា $P(x_k)=Q(x_k)$

ដែល , $k=1,2,3,4,...,m$ ។ ដោយ $x_1,x_2,...,x_m$ ជាចំនួនខុសគ្នា និង $m>n$ នោះគេបាន $P(x)=Q(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x$ ។

១១.ទ្រឹស្តីបទ បើ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $n>0$ មាន $n$ ឫស $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,....,\alpha_n$ នោះគេអាចដាក់វាជាផលគុណកត្តាបានតែមួយបែបគត់គឺ $P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)....(x-\alpha_n)$

១២-ទ្រឹស្តីបទវ្យែត

បើ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $n>0$ មាន $n$ ឫស $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,....,\alpha_n$ នោះគេបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\ ,\ \sum_{1\le i<j\le n}\alpha_i\alpha_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},....,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3.....\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

ឧទាហរណ៍១ បើ $\alpha$ និង $\beta$ ជាឫសនៃ $P(x)=ax^2+bx+c$ , $a\neq 0$ នោះគេបាន

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\,\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

ឧទាហរណ៍២ បើ $\alpha$ , $\beta$ និង $\gamma$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ , $a\neq 0$

នោះគេបាន $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$

## មេរៀនទី០៨.លីមីតនៃអនុគមន៍

### ១-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

✧ និយមន័យ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $L$ កាលណា $x$ ខិតជិត $a$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ ។

✧ និយមន័យ

អនុគមន៍ $f$ ខិតទៅរក $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា $x$ ខិតជិត $a$ បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ឬ $f(x)<-M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ឬ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ។

២-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

✧ និយមន័យ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $L$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$

បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មានចំនួន $N>0$ ដែល $x>N$ ឬ $x<-N$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ។

✧ និយមន័យ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

✧ និយមន័យ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $N>0$ ដែល $x<-N$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ។

៣-ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ , $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ និង $\lim\limits_{x\to a} h(x)=N$ ដែល $L$ , $M$ និង $N$ ជាចំនួនពិត នោះគេបាន ៖

ក. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)-h(x)]=L+M-N$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}[\alpha f(x)+\beta g(x)-\gamma h(x)]=\alpha L+\beta M-\gamma N$ ( $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ )។

គ. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)h(x)]=L.M.N$

ឃ. $\lim\limits_{x\to a}[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{L}{M}$ ដែល $M\neq 0$

៤-លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

រូបមន្តសំខាន់ៗគួរកត់សម្គាល់ ៖

ក. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

**៥-លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់**

បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរដែលមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ និង $\lim\limits_{x\to L} f(x)=f(L)$ នោះ $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)]=f(L)$ ។

**៦-លីមីតតាមការប្រៀបធៀប**

ក.បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែលចំពោះ $\forall x\ge A$ គេមាន $f(x)\ge g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ខ.បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែលចំពោះ $\forall x\ge A$ គេមាន $f(x)\le g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ។

គ.បើ $f,g$ និង $h$ ជាអនុគមន៍បី ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែលចំពោះ $\forall x\ge A$ គេមាន $g(x)\le f(x)\le h(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lambda$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$

ឃ.បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែលចំពោះ $\forall x\ge A$ គេមាន $f(x)\le g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lambda'$ នោះ $\lambda\le\lambda'$ ។
( $\lambda$ និង $\lambda'$ ជាចំនួនពិត ) ។

**៧-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

ទ្រឹស្តីបទ បើ $x$ ជារង្វាស់មុំ ឬ ធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

សម្គាល់ ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

**៨-លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

រូបមន្តសំខាន់ៗ ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ ច. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=+\infty$

១០-លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

រូបមន្តសំខាន់ៗ ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

ខ. $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

គ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ឃ. $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$

ង. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

ច. $\lim_{x\to0^+}x^n\ln x=0$

## មេរៀនទី០៩.ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១.ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

ដេរីវេ $f'(x_0)$ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ នៅត្រង់ $x=x_0$ (បើមាន)កំណត់ដោយ

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ ។

បើគេតាង $x-x_0=h$ ឬ $x=x_0+h$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

២.ភាពមានដេរីវេ និង ភាពជាប់

សន្មតថាអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើចន្លោះ $I$ ហើយ $x_0$ ជាចំនួនពិតនៅក្នុងចន្លោះ $I$ និង $h$ ជាចំនួនពិតមិនសូន្យដែល $x_0+h$ ជារបស់ $I$ ។

* ចំនួនដេរីវេឆ្វេងត្រង់ចំនួន $x_0$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់តាងដោយ ៖

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

* ចំនួនដេរីវេស្តាំត្រង់ចំនួន $x_0$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់តាងដោយ ៖

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

* ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ $x_0$ ( បើមាន )កំណត់តាងដោយ ៖

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ហើយតម្លៃនៃ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ មាន

លុះត្រាតែ $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $f$ មានដេរីវេត្រង់ $x=x_0$ លុះត្រាតែ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=x_0$ និងចំនួនដេរីវេខាងឆ្វេងស្មើនិងចំនួនដេរីវេខាងស្តាំត្រង់ $x_0$ គឺ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ ។

## ៣.អនុគមន៍ដេរីវេ

**និយមន័យ៖**

* បើ $f$ ជាអនុគមន៍មួយកំណត់លើចន្លោះ $I$ និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ណុចទាំងអស់នៅក្នុងចន្លោះ $I$ នោះគេថាអនុគមន៍ $f$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $I$ ។
* អនុគមន៍ដែលគ្រប់ $x\in I$ ផ្សំបានចំនួនដេរីវេនៃ $f$ ត្រង់ $x$ ហៅថាអនុគមន៍ដេរីវេនៃ $f$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $f': x \mapsto f'(x)$ ។
* ដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ។

គេអាចប្រើនិមិត្តសញ្ញា $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$ សម្រាប់តាងដេរីវេនៃអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y=f(x)$ ។

## ៤.រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ

| **អនុគមន៍** | **ដេរីវេ** |
|---|---|
| ក. $y=k$ $y'=0$ | |
| ខ. $y=x^n$ | $y'=nx^{n-1}$ |
| គ. $y=\frac{1}{x}$ $y'=-\frac{1}{x^2}$ | |
| ឃ. $y=\sqrt{x}$ | $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| ង. $y=e^x$ $y'=e^x$ | |

| | |
|---|---|
| ច. $y=a^x$ | $y'=a^x\ln a$ |
| ឆ. $y=\ln x$ | $y'=\dfrac{1}{x}$ |
| ជ. $y=\sin x$ | $y=\cos x$ |
| ឈ. $y=\cos x$ | $y'=-\sin x$ |
| ញ. $y=\tan x$ | $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ |
| ដ. $y=\cot x$ | $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$ |
| ឋ. $y=\arcsin x$ | $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| ឌ. $y=\arccos x$ | $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| ឍ. $y=\arctan x$ | $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ |

## ៨.រូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេអនុគមន៍

| អនុគមន៍ | ដេរីវេ |
|---|---|
| ក. $y=u^n$ | $y'=n.u'.u^{n-1}$ |
| ខ. $y=\sqrt{u}$ | $y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| គ. $y=u.v$ | $y'=u'v+v'u$ |
| ឃ. $y=\dfrac{u}{v}$ | $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ |
| ង. $y=\ln u$ | $y'=\dfrac{u'}{u}$ |
| ច. $y=\sin u$ | $y'=u'.\cos u$ |
| ឆ. $y=\cos u$ | $y'=-u'\sin u$ |
| ជ. $y=e^u$ | $y'=u'.e^u$ |

ឈ. $y = \tan u$ $\qquad y' = u'(1+\tan^2 u)$

ញ. $y = \arcsin u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

ដ. $y = \arccos u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

ឋ. $y = \arctan u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

ឲ. $y = u^V$ $\qquad y' = u^V\left( v'\ln u + v\dfrac{u'}{u} \right)$

## ៦.ដេរីវេបន្តបន្ទាប់

ឧបមាថាគេមាន $f$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេមិនកំណត់ ឬដេរីវេទី $n$ លើចន្លោះ $I$ ។

គេកំណត់ដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍នេះដូចតទៅ៖

* អនុគមន៍ដេរីវេទីមួយកំណត់តាងដោយ $f'(x)$

* អនុគមន៍ដេរីវេទីពីរកំណត់តាងដោយ $f''(x)$

* អនុគមន៍ដេរីវេទីបីកំណត់តាងដោយ $f'''(x)$

* អនុគមន៍ដេរីវេទីបួនកំណត់តាងដោយ $f^{(4)}(x)$

-----------------------------------------------

* អនុគមន៍ដេរីវេទី $n$ កំណត់តាងដោយ $f^{(n)}(x)$ ។

## ៧.សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍មួយ

✧ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ $x_0$ គឺជាចំនួនដេរីវេនៃ $f$ ត្រង់ $x_0$ គឺ $m = f'(x_0)$ ។

✧ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ $x_0$ ឲ្យតាមរូបមន្ត៖

$(T): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ។

## ៨.ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

### ក.អនុគមន៍កើន

✧ $f$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $I$ លុះត្រាតែ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$ ។

✧ លក្ខណះ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)>f(\beta)$ ។

### ខ.អនុគមន៍ចុះ

✧ $f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $I$ លុះត្រាតែ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$ ។

✧ លក្ខណះ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)<f(\beta)$ ។

## ៩.បរមាធៀបនៃអនុគមន៍

✧ អនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$

✧ $f(x_0)=M$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ។

✧ អនុគមន៍ $f$ មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ កាលណា $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$

✧ $f(x_0)=m$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ។

## ១០.ភាពផត ប៉ោង និង ចំណុចរបត់

### ក.អនុគមន៍ផត-ប៉ោង

✧ បើគ្រប់ $x\in I$ គេមាន $f''(x)>0$ នោះគេថា $f$ ជាអនុគមន៍ផតលើចន្លោះ $I$ ។

✧ បើគ្រប់ $x\in$ គេមាន $f''(x)<0$ នោះគេថា $f$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើចន្លោះ $I$ ។

### ខ.ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

✧ គេថាចំណុច $I(x_0,y_0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ បើខ្សែកោងប៉ោង(ឬផត) នៅលើ $[a,x_0]$ ហើយផត(ឬប៉ោង)នៅលើ $[x_0,b]$ ។

✧ **របៀបរកចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោងតាង $y=f(x)$ គេត្រូវ ៖**

☞ គណនាដេរីវេទីពីរ $y''=f''(x)$

☞ ដោះស្រាយសមីការ $f''(x)=0$ (សន្មតថាមានឫស $x_0$ )។

☞ សិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$

.បើ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញានៅសងខាងនៃឫស $x_0$ នោះខ្សែកោង មានចំណុចរបត់ $I\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ ។

.បើ $f''(x)$ មិនប្តូរសញ្ញានោះខ្សែកោងគ្មានចំណុចរបត់ទេ ។

១១.ចំណោទបរមា

✧ វិធីរកបរមាកម្មនៃអនុគមន៍មួយអថេរ

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$

☞រកដេរីវេទីមួយ $y'=f'(x)$

☞ដោះស្រាយសមីការ $y'=f'(x)=0$ មានឫស $x=x_0$

☞រកដេរីវេទីពីរ $y''=f''(x)$

☞សន្និដ្ឋាន

.បើ $f''(x_0)<0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ហើយតម្លៃនៃ

អតិបរមាធៀបនោះគឺ $f(x_0)=M$ ។

-បើ $f''(x_0)>0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ហើយតម្លៃនៃ

អប្បបរមាធៀបនោះគឺ $f(x_0)=m$ ។

-បើ $f''(x_0)=0$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន ។

✧ វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយចំណោទបរមា

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$

☞ចំពោះលំហាត់ទាក់ទងនិងរូបធរណីមាត្រ គេត្រូវសង់រូបនោះ។
☞ត្រូវជ្រើសរើសអថេរតាង(អញ្ញាត) ទៅតាមប្រធានចំណោទដែលគេចោទសួរ ។
☞ត្រូវដាក់លក្ខខណ្ឌអញ្ញាតដើម្បីឲ្យចំណោទមានន័យ។
☞ចងក្រងសមីការដែលទាក់ទងតាមបម្រាប់នៃប្រធាន និង តាមទ្រឹស្តីបទ-រូបមន្ត ដែលចាំបាច់ពាក់ពន្ធ័ក្នុងចំណោទ ។
☞បង្កើតអនុគមន៍មួយដែលមានអថេរតែមួយតាមវិធីជំនួសបំបាត់សមីការដែល អាចរកតម្លៃបរមាកម្មបានតាមទ្រឹស្តីដេរីវេ

✧ សម្គាល់ ៖

នៅក្នុងករណីដែលមិនអាចអនុវត្តន៍តាមវិធីខាលើបាននោះគេអាចប្រើទ្រឹស្តីបទ សំខាន់ៗនៅក្នុងវិសមភាព សម្រាប់ស្វែងរកតម្លៃបរមាធៀបក្នុងចំណោទ។

**១២.ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា**

**ក.ល្បឿននៃចលនា**

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណះ $t$ គឺ $V(t)=S'(t)=\dfrac{dS}{dt}$

ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណះ $t$ ។

**ខ.សំទុះនៃចលនា**

សំទុះនៃចលនានៅខណះ $t$ គឺ $a(t)=\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{d^2S}{dt^2}=V'(t)=S''(t)$

ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណះ $t$ ។

**១៣.វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ៖**

**ទ្រឹស្តីបទទី១**

គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ $I$ ។

បើមានពីរចំនួនពិត $m$ និង $M$ ដែលគ្រប់ $x\in I:\ m\le f'(x)\le M$ នោះគ្រប់

ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$ ។

**សម្រាយបញ្ជាក់**

តាងអនុគមន៍ $g$ ដែល $g(x)=f(x)-mx$ មានដេរីវេលើ $I$

គេបាន $g'(x)=f'(x)-m\geq 0$ គ្រប់ $x\in I$ ( ព្រោះ $f'(x)\geq m$ )

នោះ $g$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $I$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $g(a)\leq g(b)$

ឬ $f(a)-ma\leq f(b)-mb$ នោះ $f(b)-f(a)\geq m(b-a)$ $(i)$

តាងអនុគមន៍ $h$ ដែល $h(x)=f(x)-Mx$ មានដេរីវេលើ $I$

គេបាន $h'(x)=f'(x)-M\leq 0$ គ្រប់ $x\in I$ ព្រោះ $f'(x)\leq M$ នោះគេទាញបាន

$h$ ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $I$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $h(a)\geq h(b)$

ឬ $f(a)-Ma\geq f(b)-Mb$ នោះ $f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ $(ii)$

តាមទំនាក់ទំនង $(i)\,\&\,(ii)$ គេបាន $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២

គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍ មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,b]$។

បើមានពីរចំនួនពិត $M$ ដែលគ្រប់ $x\in[a,b]:|f'(x)|\leq M$ នោះគេបាន

$|f(b)-f(a)|\leq M.|b-a|$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

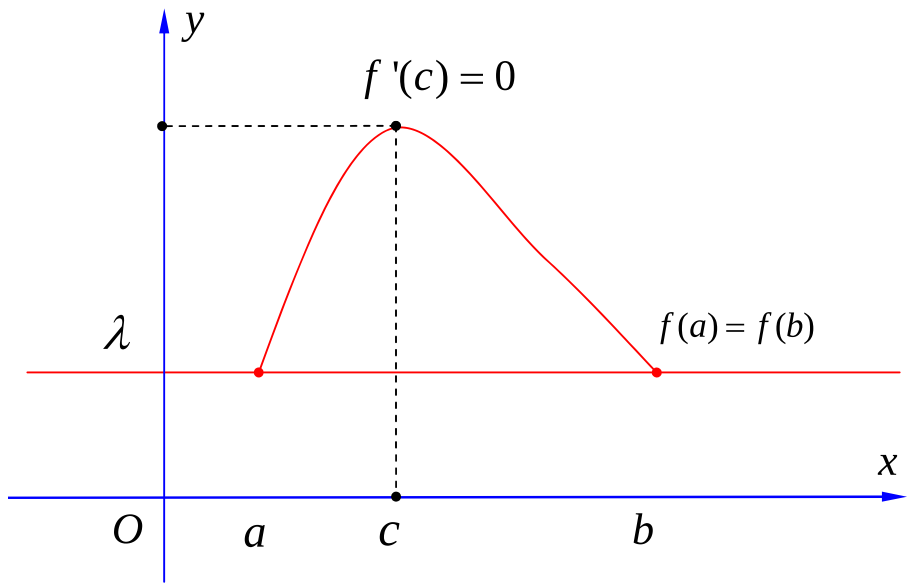
គេមានគ្រប់ $x\in[a,b]:|f'(x)|\leq M$ នោះគេទាញ $-M\leq f'(x)\leq M$

តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់គេបាន ៖

ចំពោះ $a<b$ គេបាន $-M(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ (1)
ចំពោះ $a>b$ គេបាន $-M(a-b)\leq f(a)-f(b)\leq M(a-b)$ (2)
តាម(1)និង(2)គេបាន $|f(b)-f(a)|\leq M.|b-a|$ ។
ដូចនេះទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

១៤.ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ$(a,b)$និង $f(a)=f(b)$ នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$ ។




សម្រាយបញ្ជាក់

គេតាង $f(a)=f(b)=\lambda$

.ករណីទី១ បើ $f(x)=\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ $f$ ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a,b]$ និង $f'(x)=0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$ ។

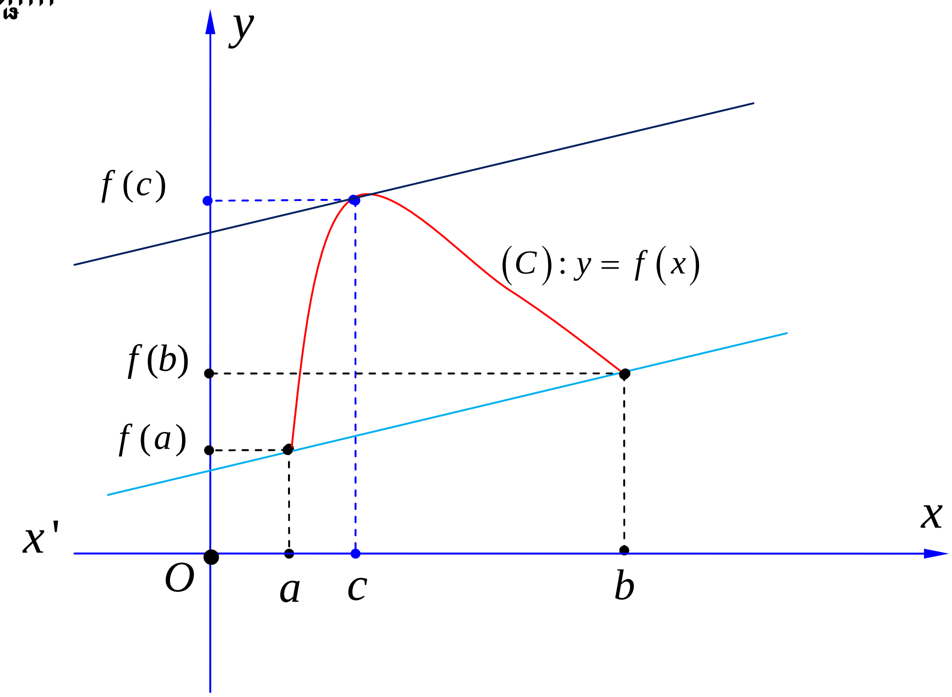
.ករណីទី២ បើ $f(x)>\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ $f$ មានតម្លៃអតិបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ ។ ដោយ $f$ មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$

.ករណីទី៣ បើ $f(x)<\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ $f$ មានតម្លៃអប្បបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ ដោយ $f$ មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$ ។

១៥.ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម(ឬទ្រឹស្តីបទ Lagrange)

បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ$(a,b)$នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់




យក $g(x)=f(b)-f(x)-\lambda(b-x)$ ដែល $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

នោះ $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និង មានដេរីវេក្នុង$(a,b)$ ហើយដោយ

$g(a)=g(b)=0$នោះតាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមាន $c\in(a,b)$មួយយ៉ាងតិចដែល $g'(c)=0$

ដោយ $g'(c)=-f'(c)+\lambda$នោះ $f'(c)=\lambda$ ។

ដូចនេះ បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ$(a,b)$នោះមាន

ចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

**១៦.អនុវត្តន៍ដេរីវេក្នុងសេដ្ឋកិច្ច**

យើងតាង $C=C(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈចំនួន $x$ គ្រឿង ,

$R=R(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារៈចំនួន $x$ គ្រឿង

$P=P(x)=R(x)-C(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញពីការលក់សម្ភារៈចំនួន $x$ គ្រឿង

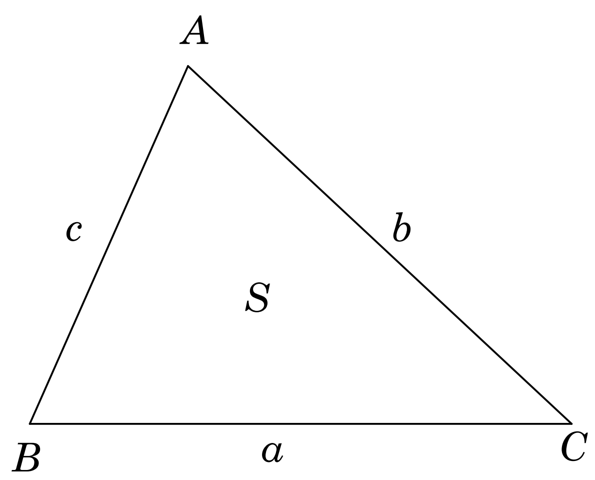
គេបាន $C'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយបន្ថែម។

$R'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូលបន្ថែម។

$P'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញបន្ថែម ។

១៧.រូបមន្តធរណីមាត្រសំខាន់ៗ

$a)$ ត្រីកោណ




ក)រូបមន្តហេរ៉ុងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ។

ដែល $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ។

ខ)ទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ។

ដែល $R$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ។

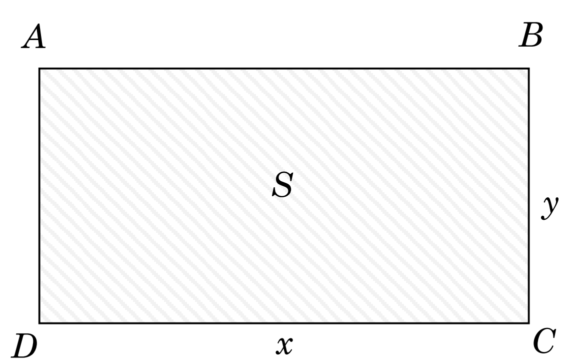
គ)ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស ៖

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

ឃ)កន្សោមផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ៖

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=pr=2R^2\sin A\sin B\sin C$$ ។

$b)$ ចតុកោណកែង

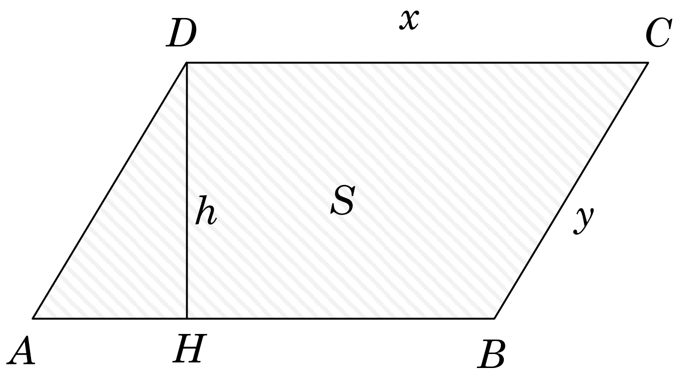


ក) ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង $S = xy$ ។

ខ) បរិមាត្រចតុកោណកែង $p = 2(x+y)$ ។

គ) អង្កត់ទ្រូងចតុកោណកែង $d = \sqrt{x^2+y^2}$ ។

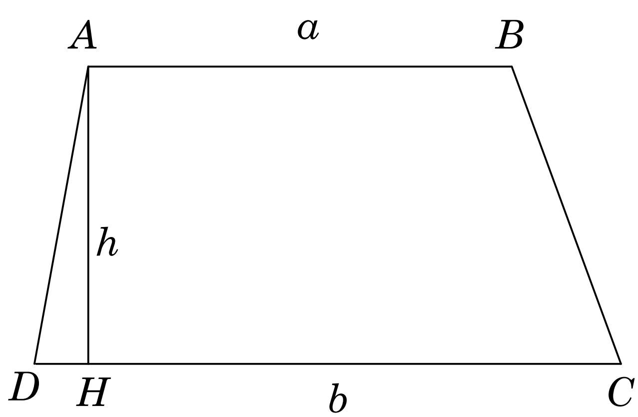
$c)$ ប្រលេឡូក្រាម




ក) ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $S = x \times h$ ។

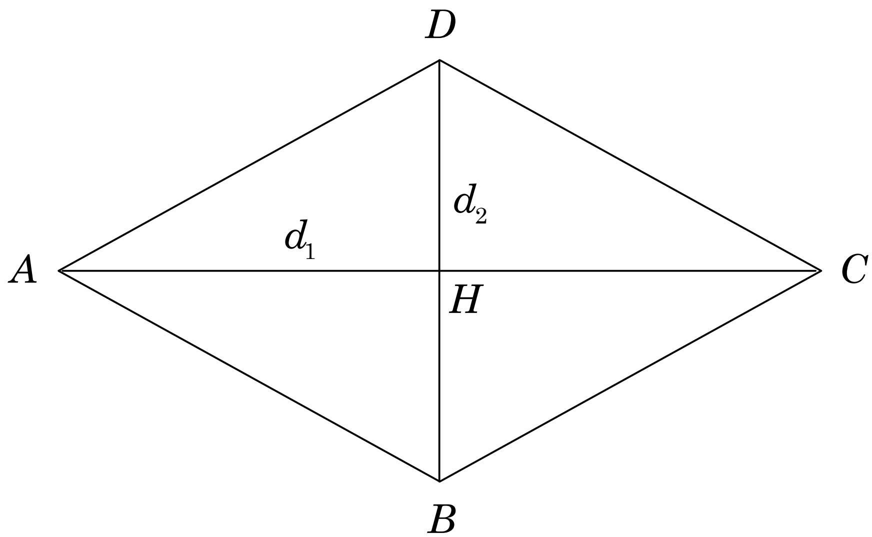
ខ) បរិមាត្រ $p = 2(x+y)$ ។

$d)$ ចតុកោណព្នាយ




ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណព្នាយ $S = \dfrac{(a+b)h}{2}$ ។

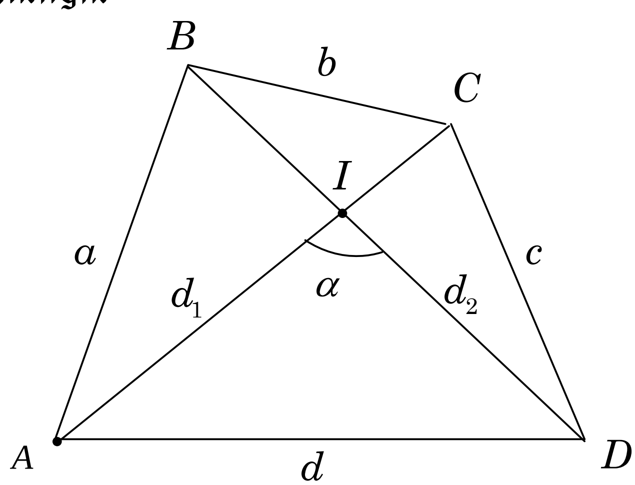
$e)$ ចតុកោណស្មើ




ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណស្មើ $S = d_1 \times d_2$ ។

ដែល $d_1$: អង្កត់ទ្រូងទី១ និង ដែល $d_2$: អង្កត់ទ្រូងទី២។

$f)$ ចតុកោណប៉ោង

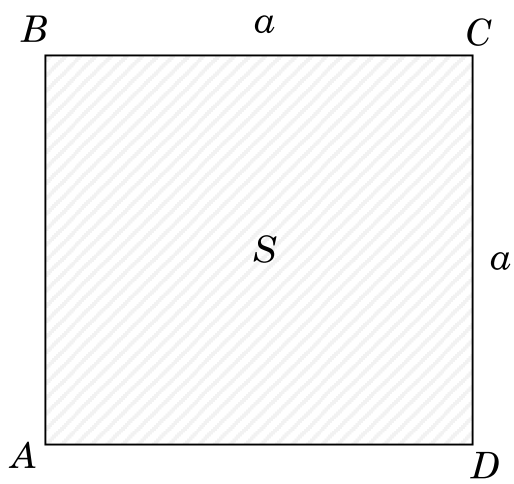



រូបមន្តផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណប៉ោង $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$ ។

កន្សោមផ្ទៃក្រឡា $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+B}{2}}$

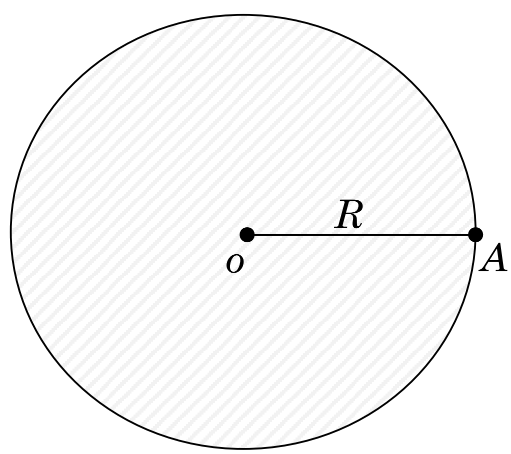
ដែល $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ។

$g)$ ការេ

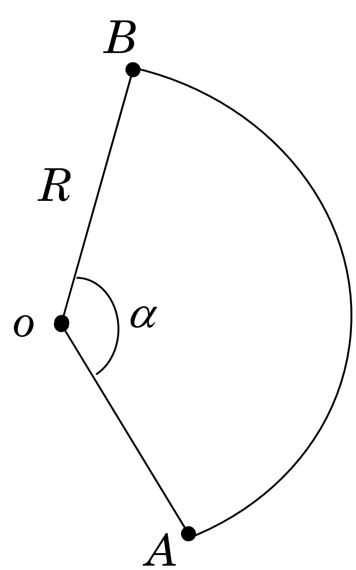



ផ្ទៃក្រឡាការេ $S=a^2$ និងបរិមាត្រការេ $p=4a$ ។

$h)$ រង្វង់និងចំរៀកថាស



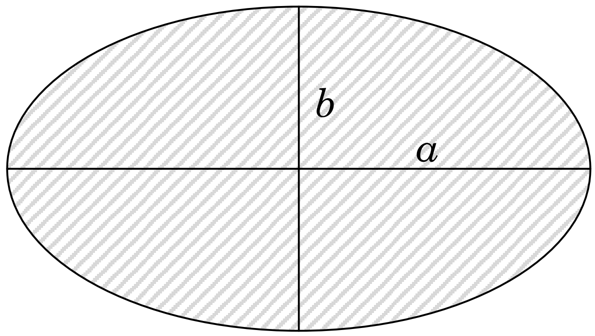

ផ្ទៃក្រឡារបស់រង្វង់ $S=\pi R^2$ និងបរិមាត្ររង្វង់ $p=2\pi R$ ។



ផ្ទៃក្រឡាចំរៀកថាសមុំផ្ចិត $\alpha$ គឺ $S_\alpha = \frac{1}{2}\alpha R^2$ ។

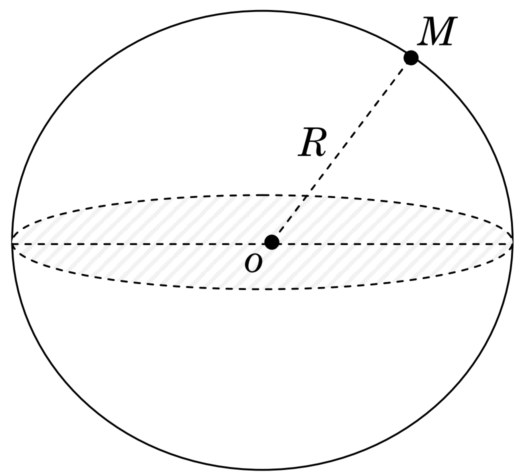
ប្រវែងនៃធ្នូ $\overset{\frown}{AB}$ គឺ $\ell_{AB} = \alpha R$ ។

$i)$ អេលីប




ផ្ទៃក្រឡារបស់អេលីបគឺ $S = \pi ab$ ។

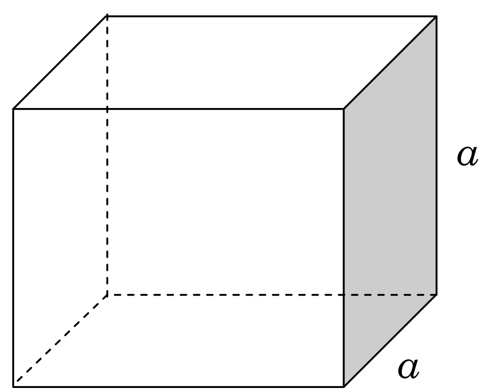
$j)$ ស្វ៊ែ




មាឌរបស់ស្វ៊ែ $V = \frac{4\pi}{3}R^3$

ផ្ទៃខាងរបស់ស្វ៊ែ $S = 4\pi R^2$

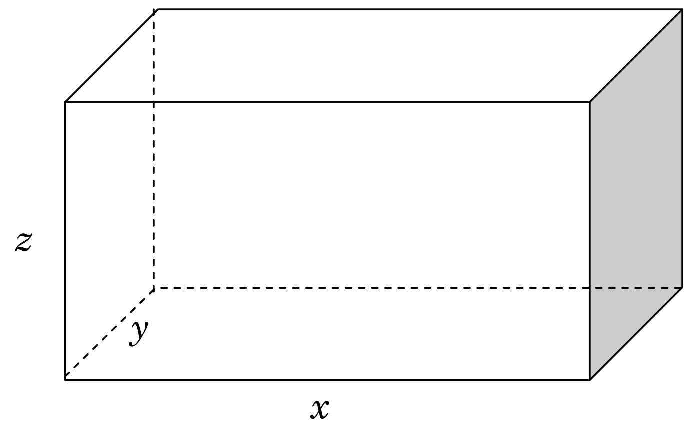
$k)$ គូប




មាឌគូប $V = a^3$ ។

ផ្ទៃក្រឡាខាងទាំងអស់ $S = 6a^2$ ។

$\ell$) ប្រលេពីប៉ែតកែង

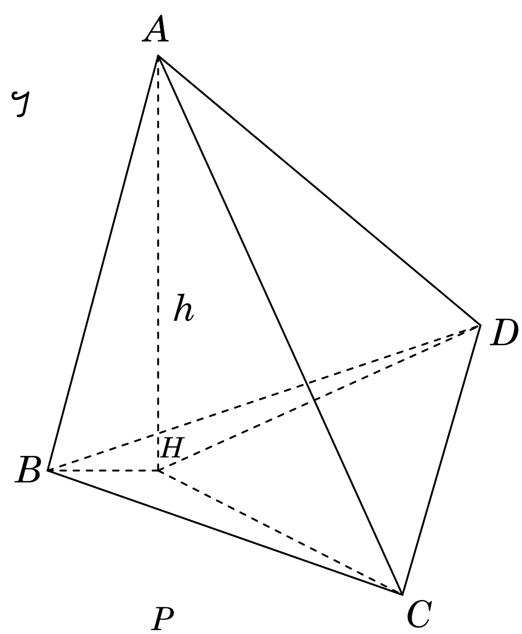



ក) មាឌរបស់ប្រឡេពីប៉ែតកែង $V = xyz$ ។

ខ) ផ្ទៃក្រឡាខាងទាំងអស់ $S = 2(xy + yz + xz)$ ។

គ) ប្រវែងអង្កត់ទ្រូងធំ $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$m$) ចតុមុខឬតេត្រាអ៊ែត

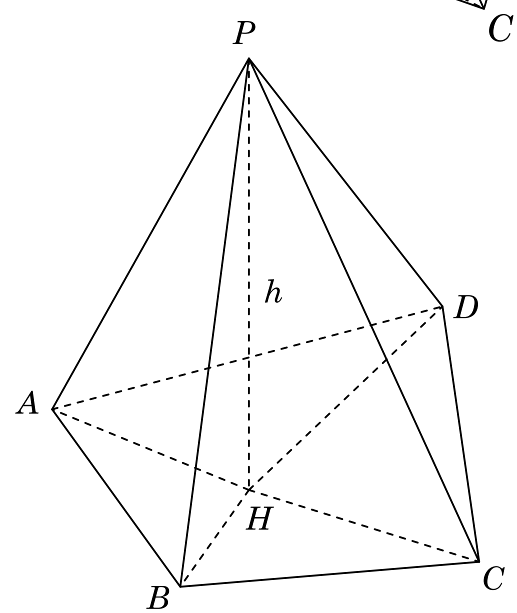



មាឌរបស់ចតុមុខ $V = \frac{1}{3}B \times h$

$B$: ផ្ទៃក្រឡាបាត។

$h$: កម្ពស់ ។

$n$) ពីរ៉ាមីត




មាឌរបស់ពីរ៉ាមីត $V = \frac{1}{3}B \times h$

$B$: ផ្ទៃក្រឡាបាត។

$h$: កម្ពស់ ។

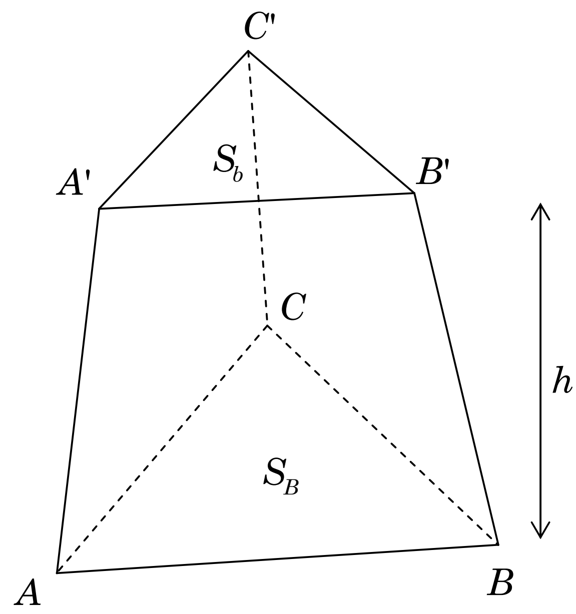
$p)$ **កំណាត់ពីរ៉ាមីត**

មាឌកំណាត់ពីរ៉ាមីត៖

$$V = \frac{1}{3}\left(S_B + S_b + \sqrt{S_B S_b}\right) \times h$$

$S_b$ : ផ្ទៃក្រឡាបាតតូច

$S_B$ : ផ្ទៃក្រឡាបាតធំ។



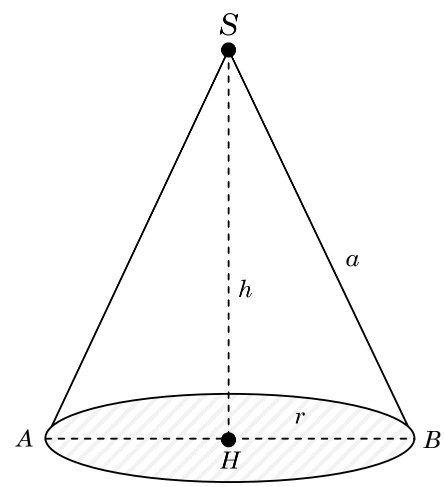

$q)$ **កោនបរិវត្តន៍**

ក.មាឌរបស់កោន $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ខ.ក្រឡាផ្ទៃខាង $S_l = 2\pi ra$

គ)ក្រឡាផ្ទៃសរុប $S_T = 2\pi r^2 + 2\pi ra$

ឃ)ជនៃទ្រេត $a = \sqrt{r^2 + h^2}$



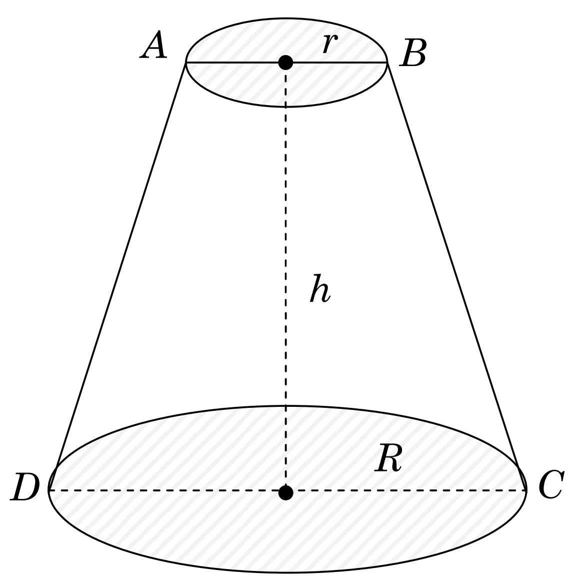

$r)$ **កំណាត់កោនបរិវត្តន៍**

ក)មាឌរបស់កំណាត់កោណ

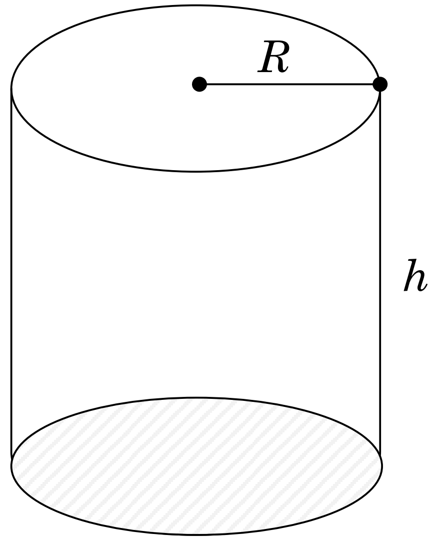
$$V = \frac{\pi}{3}\left(r^2 + R^2 + r\,R\right) \times h \text{ ។}$$

ខ)ក្រឡាផ្ទៃមុខកាត់ដែលកាត់តាមអ័ក្ស

$$S = (r + R)h \text{ ។}$$



s) ស៊ីឡាំង




ក )មាឌរបស់ស៊ីឡាំង ៖

$V = \pi R^2 h$ ។

ខ )ផ្ទៃក្រឡាខាង ៖

$S_l = 2\pi Rh$ ។

គ )ផ្ទៃក្រឡាខាងសរុប ៖

$S_t = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ ។

## មេរៀនទី១០.**អាំងតេក្រាលមិនកំណត់**

### ១-ព្រីមីទីវ

**១.១.និយមន័យ ៖**

គេថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ $I$ កាលណាចំពោះគ្រប់ $x \in I$ គេបាន $F'(x) = f(x)$ ។

**១.២.ទ្រឹស្តីបទ**

បើអនុគមន៍ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ $I$ នោះចំពោះគ្រប់ $x \in I$ គេមាន $F(x) = G(x) + C$ ដែល $C$:ជាចំនួនថេរ ។

### ២-អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

**២.១.និយមន័យ**

បើអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍

$f$ កំណត់ដោយ $\int f(x).dx = F(x) + C$ ។ ដែល $C$:ជាចំនួនថេរ ។

២.២.លក្ខណៈ

$a)\ \int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx$

$b)\ \int [f(x) + g(x)].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$

$c)\ \int [f(x) - g(x)].dx = \int f(x).dx - \int g(x).dx$

៣-រូបមន្តសំខាន់ៗអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

1. $\int k.dx = kx + c$

2. $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1} + c$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

6. $\int \sin x.dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x.dx = \sin x + c$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

10. $\int e^x.dx = e^x + c$

11. $\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

12. $\int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}.e^{ax} + c$

13. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.\ln|ax+b| + c$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}.\sqrt{ax+b} + c$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

16 . $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}.arctn(\frac{x}{a}) + c$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

20. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

21. $\int \cot x.dx = \ln|\sin x| + c$

22. $\int \tan x.dx = -\ln|\cos x| + c$

23. $\int \sin(ax).dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

24. $\int \cos(ax).dx = \frac{1}{a}.\sin(ax) + c$

## ៥-រូបមន្តប្តូរអថេរ

សន្មតថាគេមានអាំងតេក្រាល ៖ $I=\int f\left[\phi(x)\right].\phi'(x).dx$

បើគេតាង $u=\phi(x)$ នាំអោយ $du=\phi'(x).dx$

គេបាន $I=\int f\left[\phi(x)\right].\phi'(x).dx=\int f(u).du=F(u)+c$ ។

## ៦-រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

1. $\int k.du=ku+c$
2. $\int u^n.du=\frac{1}{n+1}.u^{n+1}+c$
3. $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+c$
5. $\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+c$
6. $\int e^u.du=e^u+c$
7. $\int \sin u.du=-\cos u+c$
8. $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$
9. $\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}.\arctan\frac{x}{a}+c$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+c$
12. $\int \tan u.du=-\ln|\cos u|+c$
13. $\int \cot u.du=\ln|\sin u|+c$
14. $\int a^u.du=\frac{a^u}{\ln a}+c$

## ៧-រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗគួរចងចាំ ៖

1. $\int k.P'(x).dx=k.P(x)+c$
2. $\int P^n(x).P'(x).dx=\frac{1}{n+1}.P^{n+1}(x)+c \ ,n\neq-1$
3. $\int \frac{P'(x)}{P(x)}.dx=\ln|P(x)|+c$
4. $\int \frac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}}.dx=2\sqrt{P(x)}+c$
5. $\int \frac{P'(x)}{P^2(x)}.dx=-\frac{1}{P(x)}+c$
6. $\int e^{P(x)}.P'(x).dx=e^{P(x)}+c$

៨-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ពីរ $u=u(x)$ និង $v=v(x)$

គេមាន $d(u.v)=v.du+u.dv$ ( រូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល )

គេបាន $\int d(u.v)=\int v.du+\int u.dv$

ដូចនេះ $\int udv=uv-\int vdu$ (ហៅថារូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

## មេរៀនទី១១.អាំងតេក្រាលកំណត់

១-រូបមន្តឡិបនិច ញូតុន

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី $a$ ទៅ $b$ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាផលដក $F(b)-F(a)$ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x).dx=\Big[\ F(x)\ \Big]_a^b=F(b)-F(a)$ ។

### ២-លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

២.១. $\int_a^a f(x).dx=0$

២.២. $\int_a^b f(x).dx=-\int_b^a f(x).dx$

២.៣. $\int_a^b k.f(x).dx=k.\int_a^b f(x).dx$

២.៤. $\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right].dx=\int_a^b f(x).dx+\int_a^b g(x).dx$

២.៥. $\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right].dx=\int_a^b f(x).dx-\int_a^b g(x).dx$

២.៦. $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(z).dz=\int_a^b f(t).dt$

៣-រូបមន្តប្តូរអថេរ

❖សន្មតថាគេមាន $I=\int_a^b f(x).dx \quad (1)$

បើគេតាង $x=\phi(t)$ នាំអោយ $dx=\phi'(t).dt$ ហើយចំពោះ $x\in[a,b]$

នោះ $t\in[t_1,t_2]$ ។ ដូចនេះ $I=\int_a^b f(x).dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\phi(t)].\phi'(t).dt$ ។

❖សន្មតថាគេមាន $I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx \quad (2)$

បើគេតាង $u=\phi(x)$ នាំអោយ $du=\phi'(x).dx$

ចំពោះ $x\in[a,b]$ នោះ $u\in[\phi(a),\phi(b)]$

គេបាន $I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u).du$ ។

៤-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int_a^b u.dv=[u.v]_a^b-\int_a^b v.du$$

៥-ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

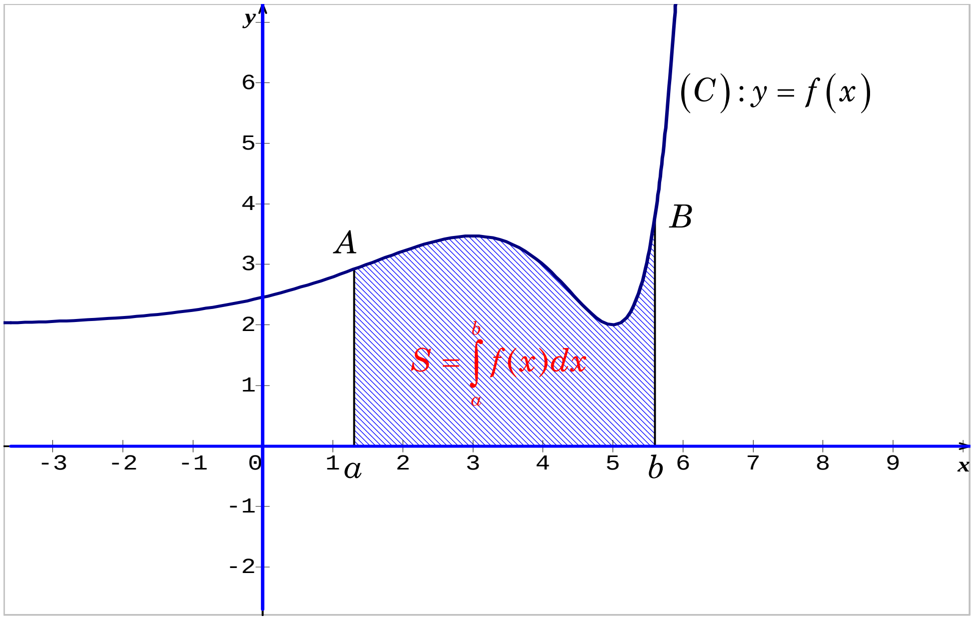
❖ បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ , $x=b$

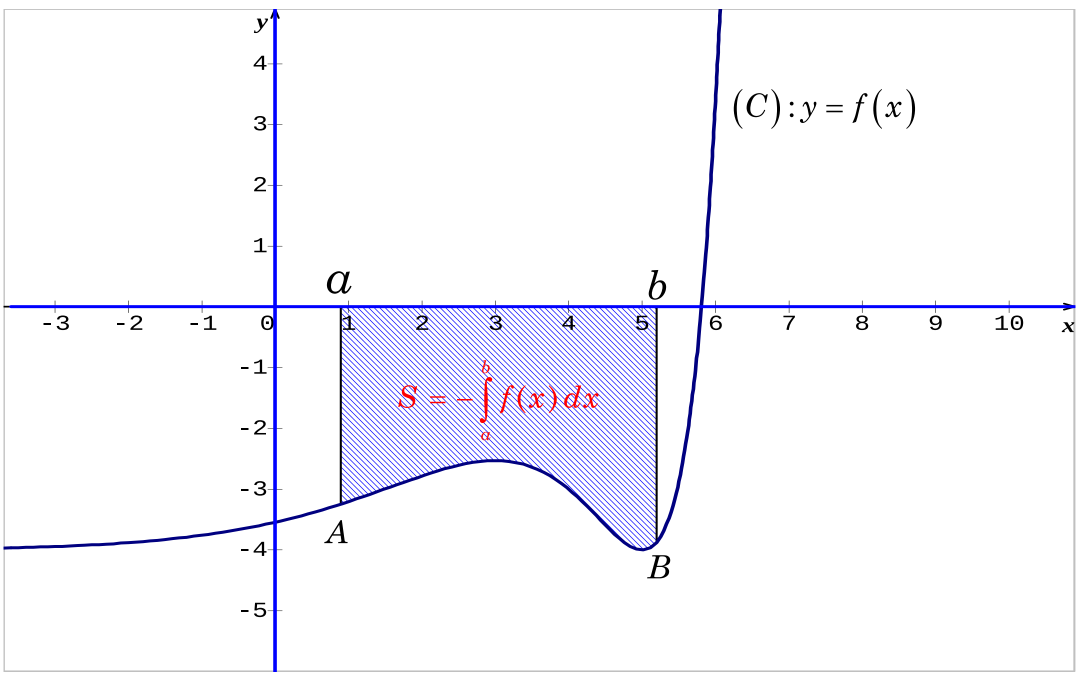
កំណត់ដោយ $S=\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x)\ge 0$ ។

ឬកំណត់ដោយ $S=-\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x)\le 0$ ។

.ករណីដែល $\forall x\in[a,b]: f(x)\ge 0$



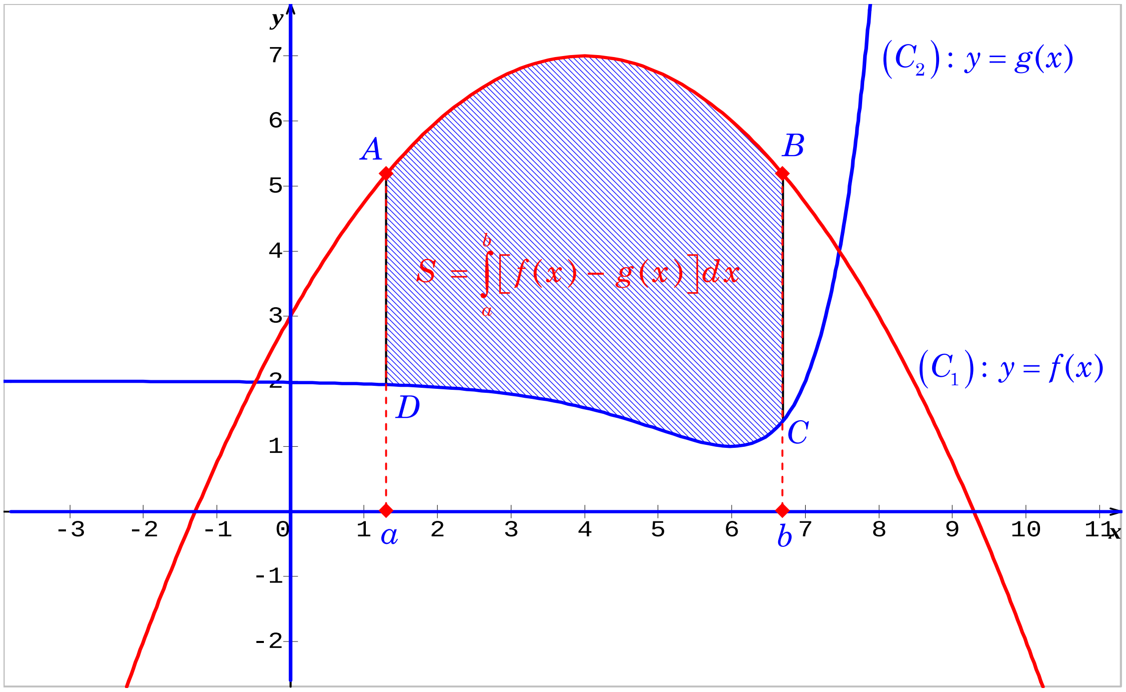

.ករណីដែល $\forall x \in [a,b] : f(x) \le 0$




❖បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះ

ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរកំណត់ដោយ $S = \int_a^b [f(x) - g(x)].dx$

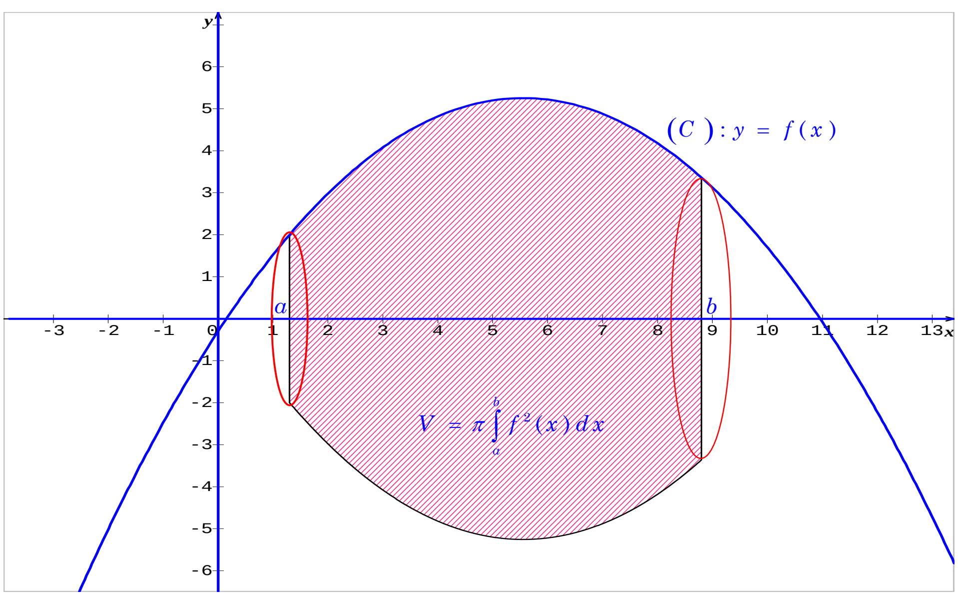
ដែល $f(x) \ge g(x)$ គ្រប់ $x \in [a,b]$ ។




## ៦-មាឌសូលីត

❖បើអនុគមន៍ $f$ វិជ្ជមានហើយជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌនៃសូលីដបរិវត្តន៍បាន ពីរង្វិលជុំវិញអក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ អក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x = a$ និង $x = b$ កំណត់ដោយ៖

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[ \pi f^2(x_k).\Delta x \right] = \pi \int_a^b f^2(x).dx$$ ។



❖មាឌនៃសូលីដបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស (ox) នៃផ្ទៃខណ្ឌដោយ

ក្រាប $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ដែល $f(x)\geq g(x)$

កំណត់ដោយ $V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right].dx$ ។

**៧-តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍មួយ**

តម្លៃមធ្យមនៃ $f$ កំណត់ជាប់លើ $[a,b]$ គឺ $y_m=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$

**៨-ប្រវែងធ្នូនៃក្រាប**

ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាង $f$ លើ$[a,b]$ គឺ $L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}.dx$

## មេរៀនទី១២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

**១-និយមន័យ**

☆សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ជាសមីការដែលមានអនុគមន៍ $y=f(x)$

និងដេរីវេ $y',y'',....,y^{(n)}$ ។

☆គេថាអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយ

កាលណាអនុគមន៍ $y$ និងដេរីវេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

☆លំដាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាលំដាប់ដេរីវេខ្ពស់បំផុតនៅក្នុង

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនោះ ។

**២-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១**

**២.១.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលងាយ**

$$y' = E(x) \Rightarrow y = \int E(x).dx$$

## ២.២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទី១

☆សមីការរាង $y'+ay=0$ , $a \in \Re$ ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន

លំដាប់ទី១ មានមេគុណថេរ ។

☆សមីការរាង $y'+ay=0$ , $a \in \Re$ មានចម្លើយ $y = f(x) = k\,e^{-ax}$

ដែល $k$ ជាចំនួនពិតណាមួយក៏បាន ។

## ២.៣.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ទី១

☆សមីការរាង $y'+ay=f(x)$ , $a \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ ហៅថាសមីការ

លីនេអ៊ែមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ទី១ មានមេគុណថេរ ។

☆របៀបដោះស្រាយ

សមីការរាង $(E):\; y'+ay=f(x)$ , $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

☞ រកចម្លើយអូម៉ូសែន $y'+ay=0$ គឺ $y_h = k\,e^{-ax}$

ដែល $k$ ជាចំនួនពិតណាមួយក៏បាន ។

☞ រកចម្លើយពិសេស $y_p$ របស់សមីការ $(E)$

☞ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y = y_h + y_p$ ។

## ២.៤.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអថេរផ្តាច់លំដាប់ទី១

☆សមីការរាង $f(y)\; y' = g(x)$ ហៅថាសមីការ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលអថេរផ្តាច់លំដាប់ទី១ ។

☆របៀបដោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការរាង $f(y)\; y' = g(x)$

គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ ៖

☞ ជំនួស $y'=\dfrac{dy}{dx}$ ក្នុងសមីការគេបាន ៖

$f(y).\dfrac{dy}{dx}=g(x)$ ឬ $f(y).dy=f(x).dx$

☞ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

$\int f(y).dy=\int f(x).dx$

## ៣-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២

### ៣.១.និយមន័យ

☆សមីការរាង $(E):\ ay''+by'+cy=0\ ,\ a\neq 0,a,b,c\in\mathbb{R}$

ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២មានមេគុណថេរ ។

☆សមីការដឺក្រេទីពីរ $ar^2+br+c=0$ ហៅថាសមីការសម្គាល់នៃ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):\ ay''+by'+cy=0\ ,\ a\neq 0,a,b,c\in\mathbb{R}$

### ៣.២.ដំណោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២

សមីការរាង $(E):\ ay''+by'+cy=0\ ,\ a\neq 0,a,b,c\in\mathbb{R}$

មានសមីការសម្គាល់ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ។

☆ករណីទី១

$\Delta>0$ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $\lambda_1$ និង $\lambda_2$

ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E)$ កំណត់ដោយ ៖

$y=f(x)=A\,e^{\lambda_1 x}+B\,e^{\lambda_2 x}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$ ។

☆ករណីទី២

$\Delta=0$ សមីការសម្គាល់មានឫសឌុបជាចំនួនពិត $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$

ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E)$ កំណត់ដោយ ៖

$y=f(x)=(A\,x+B)e^{\lambda_0 x}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$ ។

☆ករណីទី៣

$\Delta < 0$ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ ។ ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

$(E)$ គឺ $y = f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$ ។

### ៣.៣.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២

☆សមីការរាង $ay'' + by' + cy = E(x)$ , $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, E(x) \neq 0$

ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២ មានមេគុណថេរ ។

☆របៀបដោះស្រាយ

សមីការ $(E): ay'' + by' + cy = E(x)$ , $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, E(x) \neq 0$

☞ រកចម្លើយអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = 0$ តាងដោយ $y_h$

☞ រកចម្លើយពិសេស $y_p$ របស់សមីការ $(E)$

☞ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y = y_h + y_p$ ។

# មេរៀនទី១៣.ប្រូបាបលីតេ

## ១.បញ្ញត្តិនៃប្រូបាប

ប្រូបាបមានសារៈសំខាន់នៅក្នុងជីវភាព ប្រចាំថ្ងៃរបស់យើងដែលយើងប្រើប្រាស់វា សម្រាប់វាស់កម្រឹតនៃភាពមិនទៀងទាត់។ កាលណាយើងគ្រោងធ្វើអ្វីមួយកាលណា អ្នកឧតុនិយមទស្សន៍ទាយអាកាសធាតុឬក្រុមហ៊ុនជានារាប់រងធ្វើគោលនយោបាយ របស់ក្រុមហ៊ុនចាំបាច់ត្រូវប្រើប្រូបាបដើម្បីធ្វើសេចក្តីសម្រេចចិត្តឬធ្វើការជ្រើសរើស។

### ១.១.ព្រឹត្តិការណ៍ លំហសំណាក

ព្រឹត្តិការណ៍លំហសំណាកគឺជាសំនុំនៃលទ្ធផលអាចទាំងអស់ ។

### ១.២.រូបមន្តគោលនៃប្រូបាប

ក្នុងពិសោធន៍មួយ ដែលមានលំហសំណាក $S$ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A$ កើតឡើងកំណត់ដោយ $P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$ ។

ដោយ $A\subseteq S$ នោះគេបាន $0\le P(A)\le 1$ ។

.បើ $P(A)=0$ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ជាព្រឹត្តិកាណ៍មិនអាចកើតមាន ។

.បើ $P(A)=1$ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ជាព្រឹត្តិកាណ៍ប្រាកដជាកើតឡើង ។

## ២.វិធាននៃប្រូបាប

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ជាសំនុំរងនៃលំហសំណាក យើងអាចប្រើប្រជុំ ប្រសព្វនិង បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ ដើម្បីបង្កើតព្រឹត្តិការណ៍ បន្ថែមទៀតដែលយើងហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍សមាស ។

គេឲ្យ $A$ និង $B$ ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតក្នុងលំហសំណាក $S$ នោះគេបានៈ

**២.១.ប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B$**

ជាព្រឹត្តិការណ៍កើនឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផលដែលជាលទ្ធផលនៅក្នុង $A$ ឬ $B$

ឬទាំងពីរព្រឹត្តិការណ៍ ។

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B$ (ព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ឬ $B$ )កំណត់ដោយ:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ។

បើព្រឹត្តិការណ៍ $A$ និង $B$ មិនចុះសម្រុងនឹងគ្នាគឺ $A\cap B=\varnothing$ នោះគេបាន:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ។

**២.២.ប្រសព្វព្រឹត្តិការណ៍ $A\cap B$**

ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផលដែលជាលទ្ធផលនៅក្នុង $A$ ផងនិង $B$ ផង ។

**២.៣.បំពេញព្រឹត្តិការណ៍**

បើ $\overline{E}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ $E$ ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃគ្រប់លទ្ធផលនៅក្នុងលំហសំណាក $S$ ដែលមិននៅក្នុង $E$ ។ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បំពេញ $\overline{E}$ នៃព្រឹត្តិការណ៍ $E$ កំណត់ដោយ $P(\overline{E})=1-P(E)$ ។

**៣.ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ**

ជួនកាល ការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ មានឥទ្ធិពលលើប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត និងការគណនាប្រូបាបនេះគឺលើមូលដ្ឋាននៃការសន្មតថាព្រឹត្តិការណ៍ពិសេសនោះកើតឡើង គេហៅថាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ ។

**៣.១.និយមន័យប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ:**

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ដោយដឹងថា មានព្រឹត្តិការណ៍ $B$ បានកើតឡើងរួចហើយហៅថាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ និងតាងដោយ $P(A/B)$ អានថាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ដោយបានដឹងព្រឹត្តិការណ៍ $B$ កើតឡើងរួចហើយ ។

៣.២.រូបមន្តប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ:

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ដែល $P(B)\neq 0$ ។

៣.៣.វិធានផលគុណ:

ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ $A$ និង $B$ ដោយ $P(B)\neq 0$ គេបាន:

$P(A\cap B)=P(B)\times P(A/B)$ ។

៤.ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ឬ មិនអាស្រ័យគ្នា

ព្រឹត្តិការណ៍ $A$ និង $B$ ដែលអាស្រ័យនឹងគ្នាក្នុងវិធីដែលការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយមិនជាប់ពាក់ពន្ធ័នឹងការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀតយើងហៅព្រឹត្តិការណ៍បែបនេះថាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាឬគេហៅថាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាស្រ័យនឹងគ្នា។

យើងថា ព្រឹត្តិការណ៍ពីរ $A$ និង $B$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាលុះត្រាតែ $P(A/B)=P(A)$

ឬ $P(B/A)=P(B)$ ។គេបាន $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ។

ជាទូទៅ: បើ $A_1,A_2,\dots,A_n$ ជា $n$ ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាពីរៗនោះគេបាន:

$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times P(A_3)\times\dots\times P(A_n)$ ។

៥.រាប់

ទ្រឹស្តីបទ:

បើ $A$ និង $B$ ជាសំនុំកំណត់បាននោះ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

ដែល $n(A)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A$

$n(B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $B$

$n(A\cap B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A\cap B$ ។

$n(A\cup B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A\cup B$ ។

ទ្រឹស្តីបទ: បើ $A$ និង $B$ ជាសំនុំគ្មានធាតុរួមគ្នានោះគេបាន:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

## ៦.គោលការណ៍ រាប់ ចម្លាស់ និង បន្សំ

### ៦.១.គោលការណ៍រាប់:

បើ $E_1, E_2, ...., E_p$ ជា $p$ ព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងផ្សេងៗគ្នា ដែលចំពោះព្រឹត្តិការណ៍នីមួយមានចំនួនលទ្ធផលរៀងគ្នា $r_1, r_2, ...., r_p$ នោះចំនួនលទ្ធផលសរុបនៃ $p$ ព្រឹត្តិការណ៍នេះមាន ៖ $r_1 \times r_2 \times ... \times r_p$ ។

### ៦.២.ចម្លាស់:

ចម្លាស់នៃ $n$ ធាតុខុសៗគ្នាជាតម្រៀប( គិតលំដាប់ )នៃ $n$ ធាតុ ដែលធាតុមួយនៅលំដាប់ទីមួយ ជាតុមួយទៀតនៅលំដាប់ទីពីរនិងបន្តបន្ទាប់ ។

ចំនួនចម្លាំនៃ $n$ ធាតុមាន: $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n = n!$ ។

$n!$: អានថា $n$ ហ្វាក់តូរ្យែល ដែល $0! = 1$ ។

ជាទូទៅ: ចំនួនចម្លាស់ $n$ ធាតុ យកម្តង $p$ ធាតុមាន:

$$P(n, p) = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)...(n-p+1)$$ ។

### ៦.៣.ចម្លាស់ដែលមានវត្ថុដូចគ្នា:

បើគេចម្លាស់ $n$ វត្ថុ ដែលក្នុងនោះមាន $p_1$ វត្ថុប្រភេទទទី១, $p_2$ វត្ថុប្រភេទទី២, ...... $p_k$ វត្ថុប្រភេទទី $k$ ដោយ $p_1 + p_2 + ... + p_k = n$ នោះចំនួនចម្លាស់គឺ: $N = \dfrac{n!}{p_1! p_2! .... p_k!}$ ។

### ៦.៤.បន្សំ:

បន្សំគឺជាតម្រៀបមិនគិតលំដាប់ ។ចំនួនបន្សំ $n$ ធាតុខុសៗគ្នាចាប់យកម្តង $p$ ធាតុ ( $p \le n$ ) កំណត់ និង តាងដោយ $C(n, p) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$$\text{ឬ } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{ឬ } \quad {}_nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

# មេរៀនទី១៨.ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងប្លង់

## ១-ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត $O$ កាំ $R$ ។

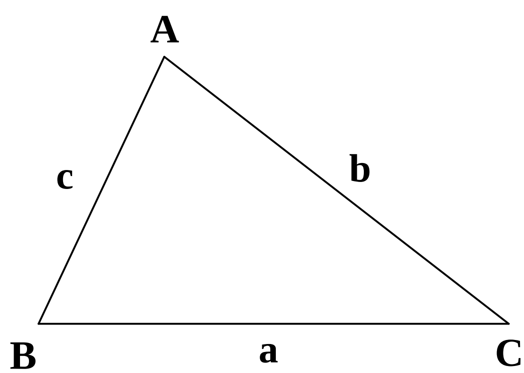
គេបាន $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ។

## ២-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ មួយមានជ្រុង

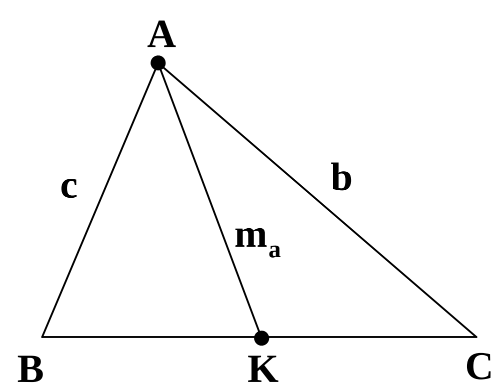
$BC=a, AC=b, AB=c$ គេបាន៖

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



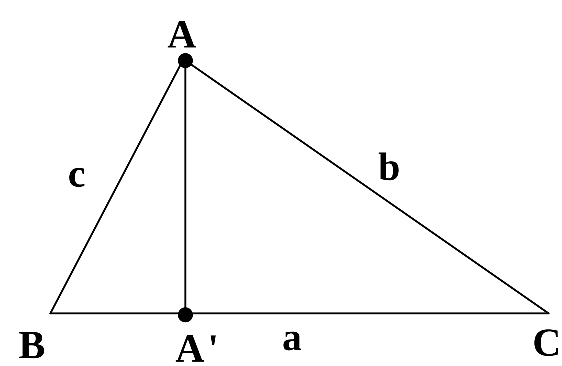

## ៣-ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$
$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$
$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$




## ៤-ទ្រឹស្តីបទចំណោល

$$a=b\cos C+c\cos B$$
$$b=a\cos C+c\cos A$$
$$c=a\cos B+b\cos A$$

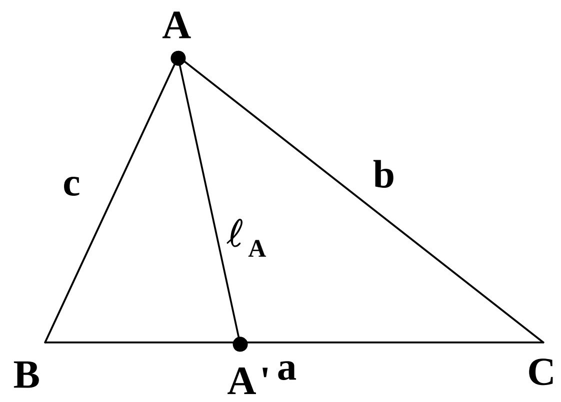


៥-រូបមន្តកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ

$$\ell_A=\frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$$

$$\ell_B=\frac{2ac}{a+c}.\cos\frac{B}{2}$$

$$\ell_c=\frac{2ab}{a+b}.\cos\frac{C}{2}$$




៦-រូបមន្តកន្លះមុំក្នុងត្រីកោណ

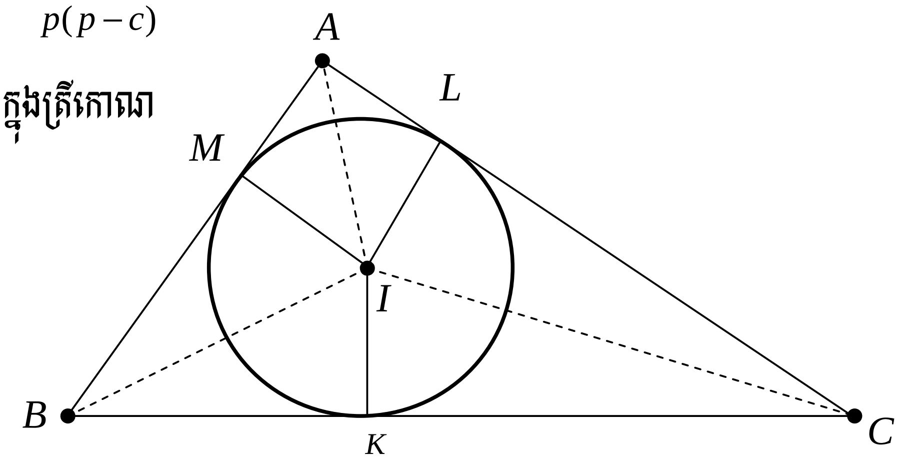
គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

$$a)\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}\\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}\\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}\end{cases}\qquad b)\begin{cases}\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}\\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ac}}\\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}\end{cases}$$

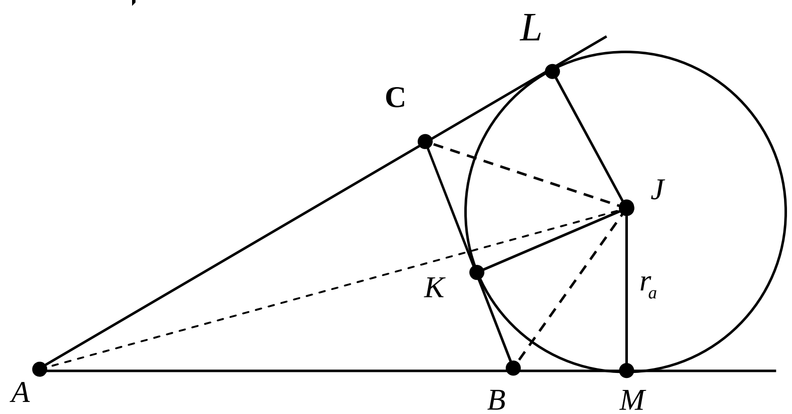
$$c)\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{cases}$$

៧-រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ



$$r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

## ៨-រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំមួយនៃត្រីកោណ




$$r_a=p\tan\frac{A}{2}=\frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}=\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b=p\tan\frac{B}{2}=\frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}}=\frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c=p\tan\frac{C}{2}=\frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{\tan\frac{B}{2}}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

## ៩-រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

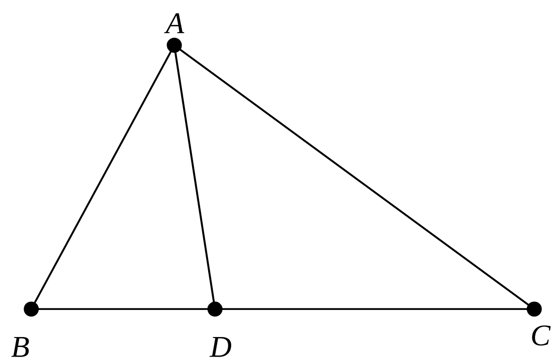
$$=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}=\sqrt{rr_ar_br_c}$$

$$=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

## ១០-ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ

បើ $AD$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង

គេបាន $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$ ។



១១-ទ្រឹស្តីបទ Leibnitz

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ $ABC$ ដែលមានជ្រុង $a,b,c$ ហើយ $O$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិង $G$ ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណនោះគេមាន $OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ ។

១២-ទ្រឹស្តីបទ Stewart

គេឱ្យត្រីកោណ $ABC$ មួយមានជ្រុង $a,b,c$ ។

$P$ ជាចំណុចមួយនៃ $AB$ ដែល $PA=m$, $PB=n$ និង $m+n=c$ ។

គេបាន $ma^2+nb^2=(m+n).PC^2+mn^2+nm^2$ ។

១៣-ទ្រឹស្តីបទអឺលែ

គេឱ្យត្រីកោណ $ABC$ មួយមានជ្រុង $a,b,c$ ។ តាង $I$ ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។ ចំពោះគ្រប់ចំណុច $X$ នៃប្លង់គេមានទំនាក់ទំនង ៖

$a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c).XI^2+abc$ ។

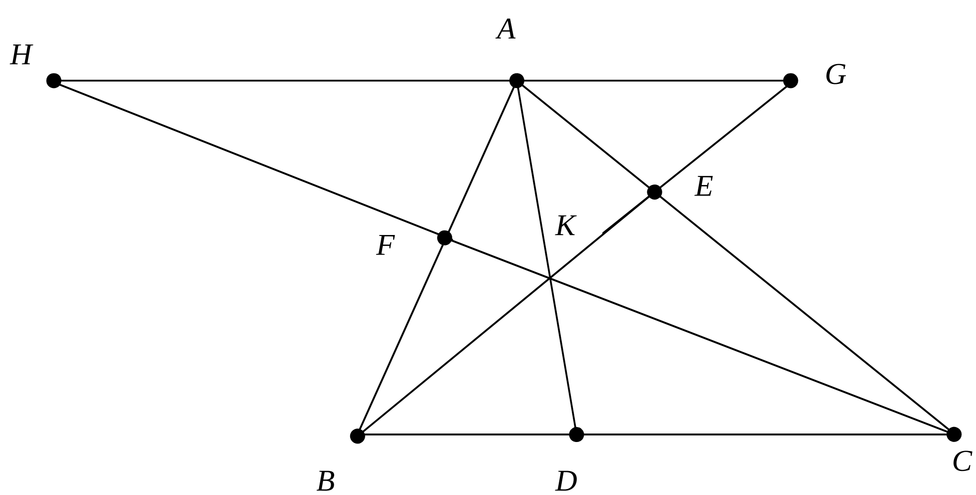
១៤-ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណមួយ៖

គេឱ្យត្រីកោណ $ABC$ មួយដែល $O$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង $I$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ។ បើ $R$ និង $r$ ជារង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណនោះគេបាន

$OI^2=R^2-2Rr$ ឬ $d=OI=\sqrt{R(R-2r)}$ ។

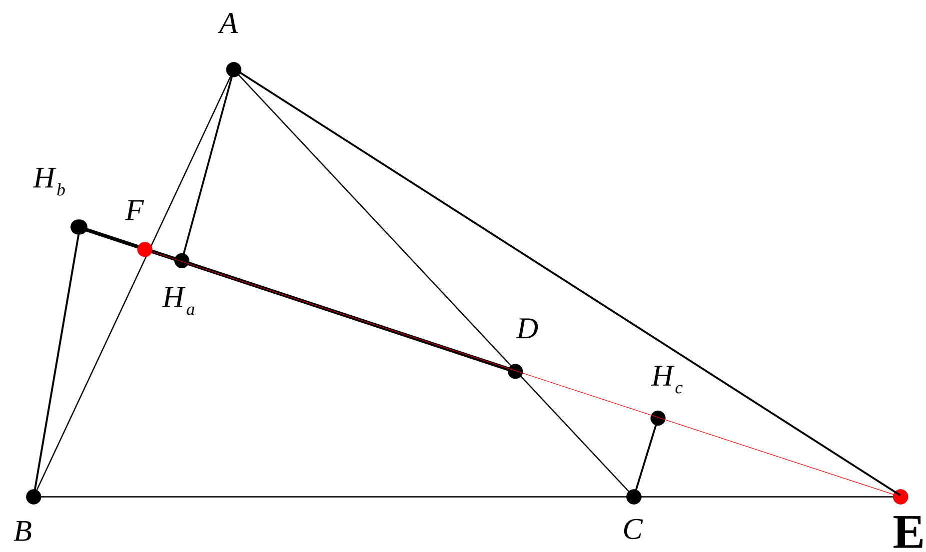
១៥-ទ្រឹស្តីបទ Ceva

ក្នុងត្រីកោណ $ABC$ មួយ បន្ទាត់បី $AD$, $BE$ និង $CF$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $K$ មួយលុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$ ។



១៦-ទ្រឹស្តីបទ Menelaus

យកបីចំនុច $F, D$ និង $E$ ស្ថិតរៀងគ្នាលើជ្រុង $AB$, $BC$ និង $AC$ នៃត្រីកោណ $ABC$ នោះចំណុចបីនេះរត់ត្រង់គ្នាបើ $\frac{AF}{BF}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}=1$



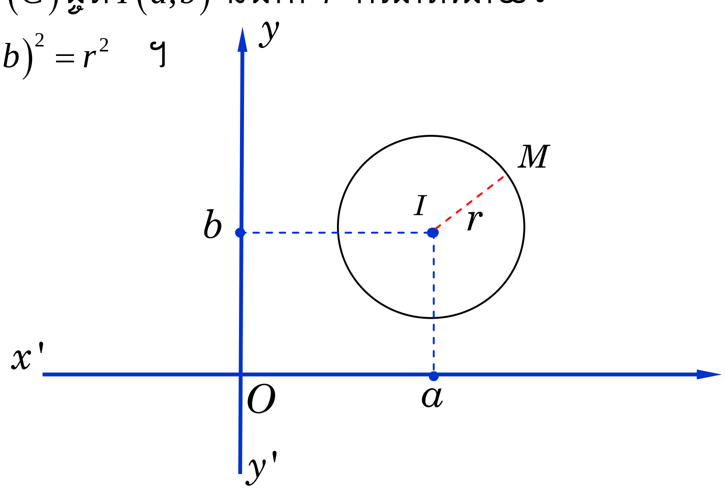

## មេរៀនទី១៩.កោណនិច

### ១.សមីការរង្វង់

$a)$ សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ក្នុងប្លង់

សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ $(C)$ ផ្ចិត $I(a,b)$ និងកាំ $r$ កំណត់ដោយៈ

$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ។



$b)$ **សមីការទូទៅនៃរង្វង់ក្នុងប្លង់**

សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ $(C)$ ផ្ចិត $I(a,b)$ និងកាំ $r$ កំណត់ដោយៈ

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ដោយពន្លាតសមីការនេះគេបាន $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

ដោយតាង $\alpha=-2a$ , $\beta=-2b$ , $\gamma=a^2+b^2-r^2$ នោះគេបាន ៖

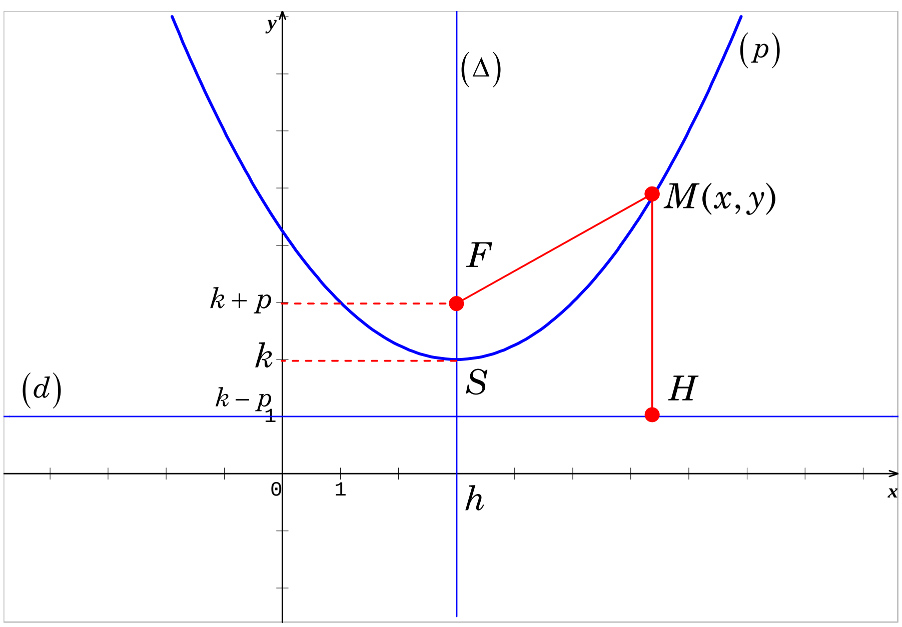
$(C): x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ជាសមីការទូទៅនៃរង្វង់ ។

## ២.ប៉ារ៉ាបូល

$*$ **និយមន័យ** :

ប៉ារ៉ាបូលគឺជាសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ដែលចម្ងាយពីចំណុចនេះទៅចំណុចនឹងមួយនឹងចម្ងាយពីចំណុចនេះទៅបន្ទាត់នឹងមួយ ។ ចំណុចនឹងនោះ ហៅថា កំណុំប៉ារ៉ាបូល ហើយបន្ទាត់នឹងនោះ ហៅថា បន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល ។

$a)$ **ប៉ារ៉ាបូលឈរ**



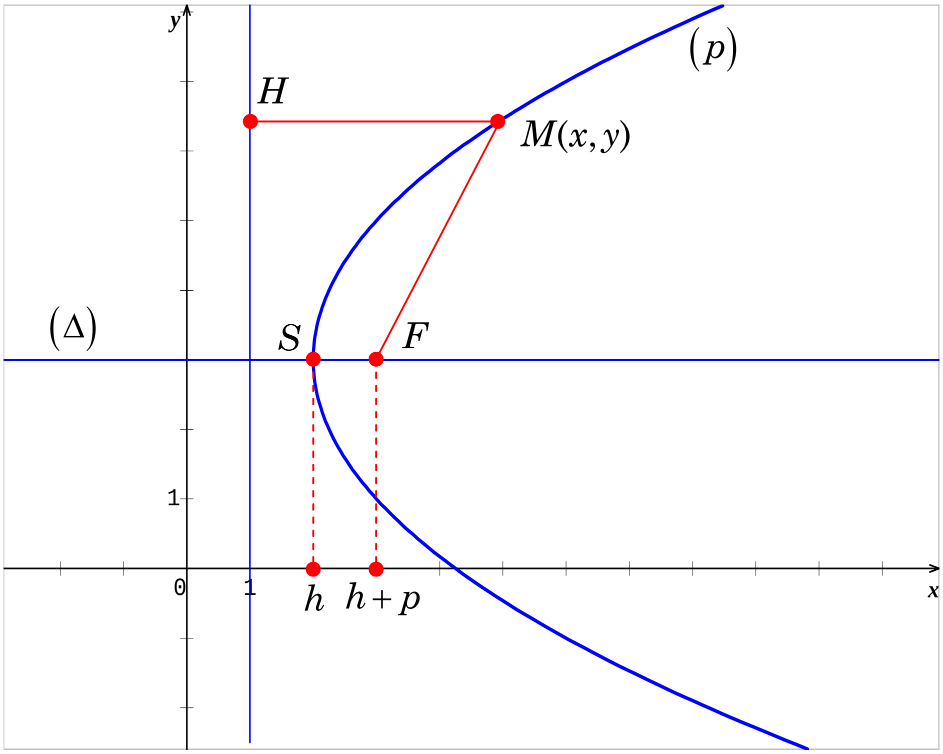

$*$ សមីការស្តង់ដា $(p):(x-h)^2=4p(y-k)$ ។

$*$ កូអរដោនេកំពូល $S(h,k)$ ។

$*$ កូអរដោនេកំណុំ $F(h,k+p)$ ។

* សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(d): y=k-p$ ។
* អ័ក្សឆ្លុះ $(\Delta): x=h$ ។

$b)$ ប៉ារ៉ាបូលដេក



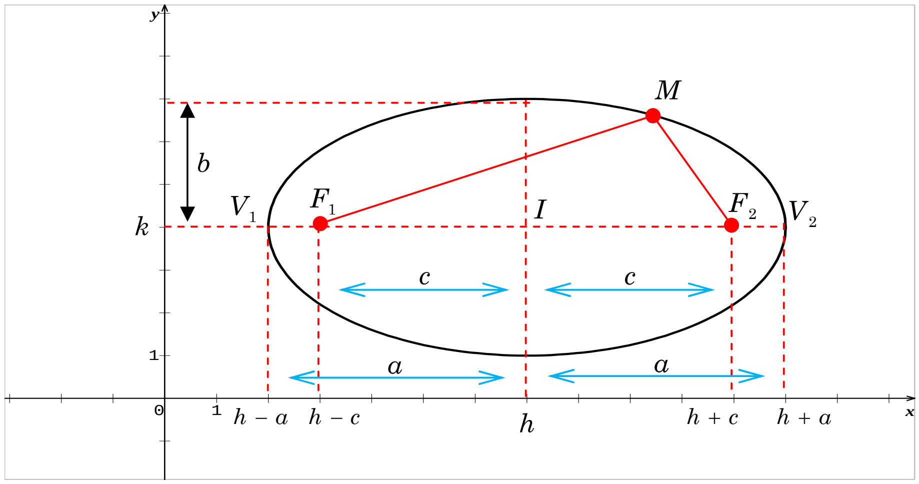

* សមីការស្តង់ដា $(p):(y-k)^2=4p(x-h)$ ។
* កូអរដោនេកំពូល $S(h,k)$ ។
* កូអរដោនេកំណុំ $F(h-p,k)$ ។
* សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(d): x=h-p$ ។
* អ័ក្សឆ្លុះ $(\Delta): y=k$ ។

## ២.១២.អេលីប

* **និយមន័យ:**

អេលីបគឺជាសំណុំចំណុចស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលបូកនៃចម្ងាយរវាងចំណុចនេះទៅនិង ចំណុចនឹងពីរជាចំនួនថេរ ។ ចំណុចនឹងពីរនោះហៅថាកំណុំ។

$a)$ អេលីបដេក



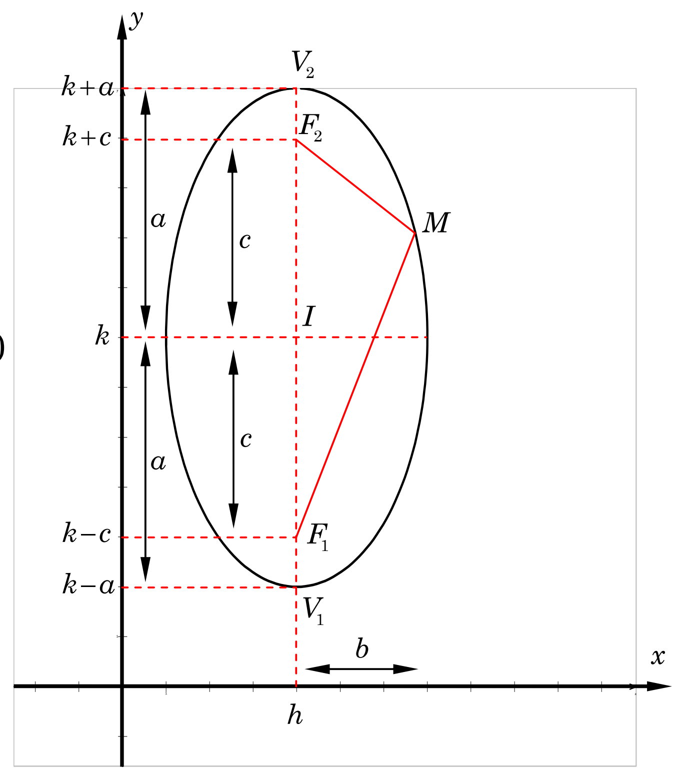

* សមីការស្តង់ដា $(E): \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ , \ a > b > 0$ ។
* កូអរដោនេផ្ចិត $I(h,k)$ ។
* កូអរដោនេកំពូល $V_1(h-a,k)$ & $V_2(h+a,k)$ ។
* កូអរដោនេកំណុំ $F_1(h-c,k)$ & $F_2(h+c,k)$ ដែល $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ។
* អិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e = \frac{c}{a}$ ។
* ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើនឹង $2a$ និងប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើនឹង $2b$ ។

$b)$ អេលីបឈរ

* សមីការស្តង់ដា ៖

$(E): \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \ , \ a > b > 0$ ។

* កូអរដោនេផ្ចិត $I(h,k)$ ។
* កូអរដោនេកំពូល $V_1(h,k-a)$ & $V_2(h,k+a)$
* កូអរដោនេកំណុំ $F_1(h,k-c)$ & $F_2(h,k+c)$ ដែល $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ។
* អិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e = \frac{c}{a}$ ។
* ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើនឹង $2a$ ។
* ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើនឹង $2b$ ។

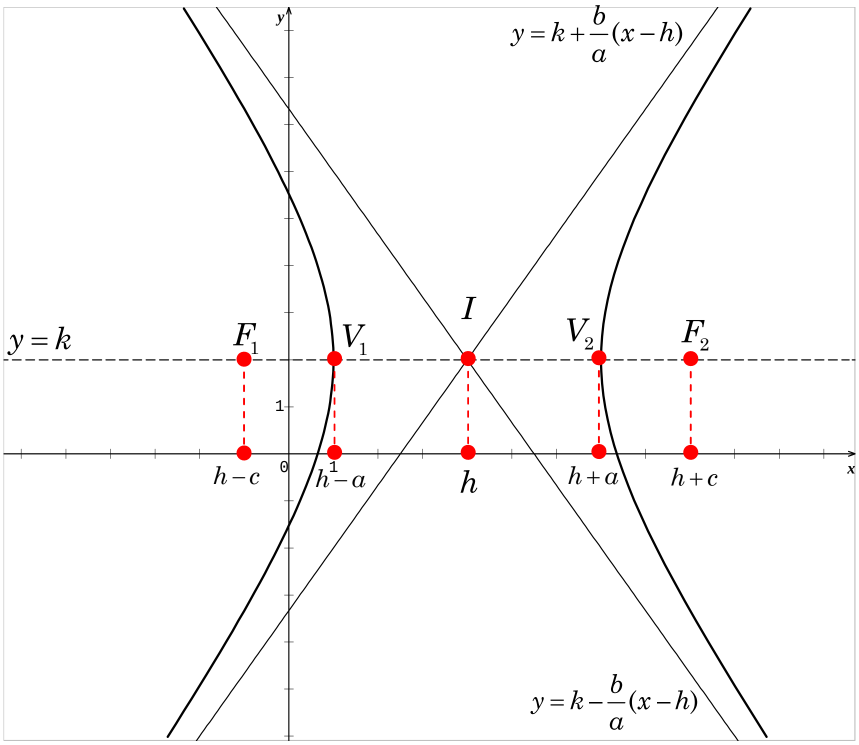


## ៣.អ៊ីពែបូល

* **និយមន័យ៖**

អ៊ីពែបូលគឺជាសំណុំចំណុចស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលដកចំងាយរវាងចំណុចនេះទៅនិងចំណុចនិងពីរជាចំនួនថេរ។ចំណុចនឹងពីរនេះហៅថាកំណុំ។

### $a)$ អ៊ីពែបូលដេក(អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស)




* សមីការស្តង់ដា $(E):\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ ,\ a>0,b>0$ ។

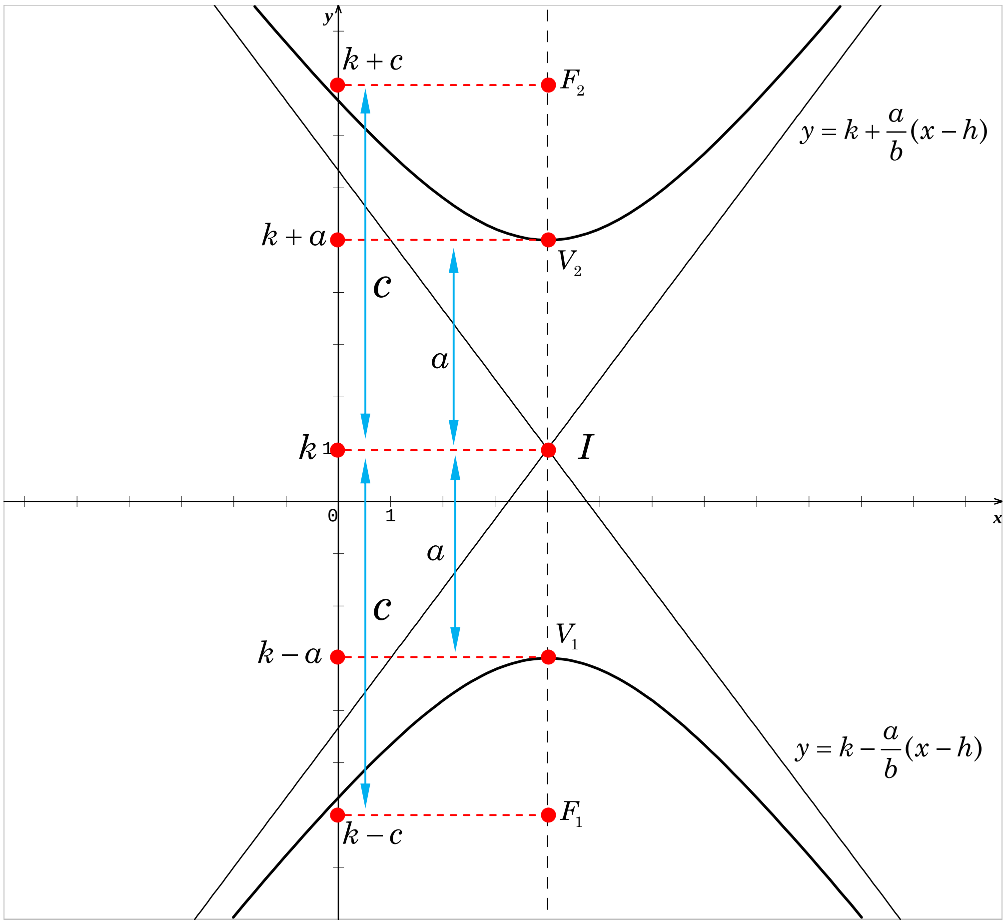
* កូអរដោនេផ្ចិត $I(h,k)$ ។

* កូអរដោនេកំពូល $V_1(h-a,k)\ \&\ V_2(h+a,k)$ ។

* កូអរដោនេកំណុំ $F_1(h-c,k)\ \&\ F_2(h+c,k)$ ដែល $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ។

* សមីការអាស៊ីមតូត $y=k+\frac{b}{a}(x-h)\ \&\ y=k-\frac{b}{a}(x-h)$ ។

$b)$ អ៊ីពែបូលឈរ(អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ)




* សមីការស្តង់ដា $(E):\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1\ ,\ a>0,b>0$ ។

* កូអរដោនេផ្ចិត $I(h,k)$ ។

* កូអរដោនេកំពូល $V_1(h,k-a)\ \&\ V_2(h,k+a)$ ។

* កូអរដោនេកំណុំ $F_1(h,k-c)\ \&\ F_2(h,k+c)$ ដែល $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ។

* សមីការអាស៊ីមតូត $y=k+\frac{a}{b}(x-h)\ \&\ y=k-\frac{a}{b}(x-h)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

# ជំពូកទី០២

# ១៦៨ លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

**Problem01**

គេស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)$ កំណត់ដោយ $u_1=\frac{1}{2}$ និងគ្រប់ $n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{u_n}{n+2}+\frac{1}{(n+2)!}$ ។

$a)$ គណនា $u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

$b)$ គណនាផលបូក $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

**Solution**

**$a)$ គណនា $u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ៖**

យើងមាន $u_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2!}$

និង $u_{n+1}=\frac{u_n}{n+2}+\frac{1}{(n+2)!}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $u_2=\frac{u_1}{3}+\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{2}{3!}$

ចំពោះ $n=2$ គេបាន $u_3=\frac{u_2}{4}+\frac{1}{4!}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}=\frac{3}{24}=\frac{3}{4!}$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី $n$ គឺ $u_n=\frac{n}{(n+1)!}$ ។

យើងនិងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់តួទី $(n+1)$ គឺ $u_{n+1}=\frac{n+1}{(n+2)!}$ ។

យើងមាន $u_{n+1}=\frac{u_n}{n+2}+\frac{1}{(n+2)!}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ តាមការឧបមាគេមាន $u_n=\frac{n}{(n+1)!}$

យើងបាន $u_{n+1}=\frac{n}{(n+1)!(n+2)}+\frac{1}{(n+2)!}=\frac{n+1}{(n+2)!}$ ពិត។

ដូចនេះ $u_n=\frac{n}{(n+1)!}$ ។

**$b)$ គណនាផលបូក $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ៖**

យើងមាន $u_n=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=1-\frac{1}{(n+1)!}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$ ។

**Problem02**

គេឲ្យចំនួនពិត $x\in[-5,5]$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(x^2+2)\sqrt{25-x^2}\le 54$ ។

**Solution**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(x^2+2)\sqrt{25-x^2}\le 54$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[-5,5]$ យើងមាន $x^2+2>0$ និង $25-x^2\ge 0$ ។

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តនិងមធ្យមធរណីមាត្រយើងបាន ៖

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x^2+2)+\frac{1}{2}(x^2+2)+(25-x^2)\right]\ge\sqrt[3]{\frac{1}{4}(x^2+2)^2(25-x^2)}$$

$$9\ \ge\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}(x^2+2)^2(25-x^2)}$$

គេទាញបាន $(x^2+2)^2(25-x^2)\le 4\times 9^3=(54)^2$

សមមូល $(x^2+2)\sqrt{25-x^2}\le 54$ ពិត ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពនៅពេលដែល $\frac{1}{2}(x^2+2)=25-x^2$ សមមូល $x=\pm 4$ ។

ដូចនេះ $(x^2+2)\sqrt{25-x^2}\le 54$ គ្រប់ $x\in[-5,5]$ ។

**សម្គាល់ ៖ វិសមភាពមធ្យមនព្វន្តនិងមធ្យមធរណីមាត្រ ៖**

$\alpha$) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a$ និង $b$ គេបាន $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពនៅពេលដែល $a=b$ ។

$\beta$) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a$ , $b$ និង $c$ គេបាន $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពនៅពេលដែល $a=b=c$ ។

$\gamma$) ជាទូទៅគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a_1,a_2,a_3,....,a_n$ គេបាន ៖

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ ....a_n}$$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $a_1=a_2=a_3=....=a_n$ ។

**Problem03**

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f$ ដែលគ្រប់ $x \neq \{0,1\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម៖

$f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x+1-\frac{1}{x}$ ។

**Solution**

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f$

គេមាន $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x+1-\frac{1}{x}$ (1)

ជំនួស $x$ ដោយ $\frac{1}{1-x}$ ក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{1}{1-x})+f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)=\frac{1}{1-x}+1-(1-x)$$

ឬ $f(\frac{1}{1-x})+f\left(\frac{1-x}{-x}\right)=x+\frac{1}{1-x}$ (2)

ជំនួស $x$ ដោយ $\frac{1-x}{-x}$ ក្នុង (2) គេបាន

$$f\left(\frac{1-x}{-x}\right)+f\left(\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}\right)=-\frac{1-x}{x}+1+\frac{x}{1-x}$$

ឬ $f(\frac{1-x}{-x})+f(x)=-\frac{1}{x}+2+\frac{x}{1-x}$ (3)

យកសមីការ (3) ដក សមីការ(2) រួចបូកសមីការ (1) គេបាន ៖

$$2f(x)=-\frac{1}{x}+2+\frac{x}{1-x}-x-\frac{1}{1-x}+x+1-\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}+2$$

នាំឲ្យ $f(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ ។

ដូចនេះ $f(x)=\frac{x-1}{x}$ ។

**Problem04**

កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $P=(x^3+1)(y^3+1)$ ដោយដឹងថា $x+y=1$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។

**Solution**

**កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $P=(x^3+1)(y^3+1)$**

តាង $p=xy$ និង $s=x+y=1$ នោះ $P=(x^3+1)(y^3+1)=p^3-3p+2$

ដោយ $p=xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ នោះ $p\in(-\infty,\dfrac{1}{4}]$ ។

គេមាន $P'=3p^2-3=3(p-1)(p+1)$

បើ $P'=0$ នោះ $p=-1$ , $p=1$ ( មិនយក )

គេមាន $P''=6p$ ចំពោះ $p=-1$ នោះ $P''=6(-1)=-6<0$

ដូចនេះអនុគមន៍ $P$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $p=-1$ គឺ $P_{\max}=4$ ។

**Problem05**

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដោយដឹងថា ៖

$x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

**Solution**

**កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$**

គេមាន $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ ( 1 )

ជំនួស $x$ ដោយ $1-x$ ក្នុង (1) គេបាន ៖

$(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$ (2)

តាម ( 1 ) គេទាញ $f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$ (3)

យក ( 3 ) ជំនួសក្នុង ( 2 ) គេបាន ៖

$(1-x)^2(2x-x^4)-x^2(1-x)^2f(x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

បន្ទាប់ពីគណនាមកគេទទួលបាន $f(x)=1-x^2$ ។

**Problem06**

ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ដោយដឹងថា ៖

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x \\ f(x+1)+x.g(2x+3)=2x^2+x \end{cases}$$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

**Solution**

**កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$**

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x & (1) \\ f(x+1)+x.g(2x+3)=2x^2+x & (2) \end{cases}$$

-យក $3x-1=t$ ឬ $x=\frac{t+1}{3}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$f(t)+g(2t+1)=t+1$ (3)

-យក $x+1=t$ ឬ $x=t-1$ ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$f(t)+(t-1)g(2t+1)=2t^2-3t+1$ (4)

-ដកសមីការ (4) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$(t-2)g(2t+1)=2t^2-4t=2t(t-2)$

នាំឲ្យ $g(2t+1)=2t$ ដែល $t\neq 2$

ដូចនេះ $g(x)=x-1$ ។

តាម (3) គេទាញ $f(t)=t+1-g(2t+1)=t+1-2t=-t+1$ ។

ដូចនេះ $f(x)=-x+1$ ។

-ម្យ៉ាងទៀតចំពោះ $x=1$ សមីការ (1) និង (2) ក្លាយជា ៖

$f(2)+g(5)=3$ នាំឲ្យ $f(2)=a$ , $g(5)=3-a$ $(a\in\mathbb{R})$

សរុបមកគេបានចម្លើយ $f(x)=-x+1$ , $g(x)=x-1$

និង $f(2)=a$ , $g(5)=3-a$ $(a\in\mathbb{R})$ ។

**Problem07**

គេឱ្យសមីការ $x^2-x-3=0$ មានឫសតាងដោយ $x_1$ និង $x_2$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=7x_1^5+19x_2^4+47$ ។

**Solution**

**គណនាតម្លៃនៃ** $A=7x_1^5+19x_2^4+47$

ដោយ $x_1$ និង $x_2$ ជាឫសរបស់សមីការនោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} x_1^2-x_1-3=0 \\ x_2^2-x_2-3=0 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} x_1^2=x_1+3 \\ x_2^2=x_2+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A=7x_1^5+19x_2^4 &= 7x_1\left(x_1^2\right)^2+19\left(x_2^2\right)^2+47 \\ &=7x_1(x_1+3)^2+19(x_2+3)^2+47 \\ &=7x_1^3+42x_1^2+63x_1+19x_2^2+114x_2+171+47 \\ &=7x_1(x_1+3)+42(x_1+3)+63x_1+19(x_2+3)+114x_2+218 \\ &=7x_1^2+21x_1+42x_1+126+63x_1+19x_2+57+114x_2+218 \\ &=7(x_1+3)+126x_1+133x_2+401 \\ &=133(x_1+x_2)+422 \end{aligned}$$

ដោយ $x_1+x_2=1$ ( តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត )

គេបាន $A=133+422=555$

ដូចនេះ $A=7x_1^5+19x_2^4+47=555$ ។

**Problem08**

ចំពោះ $a$ និង $b$ ជាចំនួនពិត សមីការ $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត។ ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a^2+b^2$ ។

**Solution**

**គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ** $a^2+b^2$

សមីការនេះ នឹង $x^2\neq 0$ គេបាន ៖

$$x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}+a(x+\frac{1}{x})+b=0$$
$$(x+\frac{1}{x})^2+a(x+\frac{1}{x})+b-2=0$$

តាង $z=x+\frac{1}{x}$ សមីការនេះអាចសរសេរ $z^2+az+b-2=0$ ឬ $az+b=2-z^2$ (1)

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន $(az+b)^2\le(a^2+b^2)(z^2+1)$ (2)

តាម (1) & (2) គេបាន $(a^2+b^2)(z^2+1)\ge(2-z^2)^2$

$$a^2+b^2\ge\frac{(2-z^2)^2}{z^2+1}$$
$$a^2+b^2\ge\frac{[3-(1+z^2)]^2}{z^2+1}$$
$$a^2+b^2\ge z^2-5+\frac{9}{z^2+1}$$

យក $t=z^2$ ដោយ $z=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$ នោះ $|z|\ge\frac{|x^2+1|}{|x|}\ge\frac{|2x|}{|x|}=2$

ហើយ $t=z^2=|z|^2\ \ge\ 4$ គេបាន $a^2+b^2\ge t-5+\frac{9}{t+1}$

តាងអនុគមន៍ $f(t)=t-5+\frac{9}{t+1}$ គេបាន $f'(t)=1-\frac{9}{(t+1)^2}=\frac{(t+4)(t-2)}{(t+1)^2}>0\,\forall t\ge4$

គេទាញបាន $f(t)$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $t\ge4$ ។

តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើនគេបាន $f(t)\ge f(4)$ តែ $f(4)=4-5+\frac{9}{4+1}=-1+\frac{9}{5}=\frac{4}{5}$
នោះ $f(t)\ge\frac{4}{5}$ ហេតុនេះគេទាញបាន $a^2+b^2\ge f(t)\ge\frac{4}{5}$ ។

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $a^2+b^2$ ស្មើនឹង $\frac{4}{5}$ ។

**Problem09**

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)$ កំណត់ដោយ $u_0 = 2019$ និងរូបមន្តកំណើន $u_{n+1} = \frac{4n+4}{(n!)^2} \cdot u_n^{\ 3}$

ដែល $n = 0,1,2,3,....$ ។ ចូរគណនា $u_n$ នៃស្វ៊ីត $(u_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

**Solution**

គណនា $u_n$ នៃស្វ៊ីត $(u_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

គេមាន $u_{n+1} = \frac{4n+4}{(n!)^2} \cdot u_n^{\ 3} = \frac{4(n+1)}{(n!)^2} u_n^{\ 3} = 4\frac{n!(n+1)}{(n!)^3} u_n^{\ 3} = 4\frac{(n+1)!}{(n!)^3} u_n^{\ 3}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 2 គេបាន $2u_{n+1} = 8\frac{(n+1)!}{(n!)^3} u_n^{\ 3}$

គេទាញ $\frac{2u_{n+1}}{(n+1)!} = \left[\frac{2u_n}{(n!)}\right]^3$ (*)

តាង $v_n = \frac{2u_n}{(n!)}$ នោះ $v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}}{(n+1)!}$

តាម (*) គេបាន $v_{n+1} = (v_n)^3$ ។ ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

គេបាន $v_n = (v_0)^{3^n}$ ដោយ $v_0 = 2u_0 = 2 \times 2019 = 4038$ ។

នោះ $v_n = (4038)^{3^n}$ ដោយ $v_n = \frac{2u_n}{(n!)}$

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{2}(4038)^{3^n} (n!)$ ។

**Problem10**

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{n(n+1)^2} \cdot \cos\frac{(1+2+3+...+n)\pi}{n^2}\right]$$

**Solution**

គណនាលីមីត

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{n(n+1)^2} \cdot \cos\frac{(1+2+3+...+n)\pi}{n^2}\right]$$

គេមាន $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

និង $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ នោះលីមីតអាចសរសេរ

$$A=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n(n+1)^2}\cos\left[\frac{n(n+1)\pi}{2n^2}\right]\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{4}\cos\frac{(n+1)\pi}{2n}\right]$$

គេមាន $\cos\dfrac{(n+1)\pi}{2n}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2n}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2n}$

គេបាន $A=-\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{n}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\right]$ តាង $t=\dfrac{\pi}{2n}$ នោះ $n=\dfrac{\pi}{2t}$

កាលណា $n\to\infty$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $A=-\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{\pi}{8t}\sin t\right]=-\dfrac{\pi}{8}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=-\dfrac{\pi}{8}$

ដូចនេះ $A=-\dfrac{\pi}{8}$ ។